Corrigé

EXERCICE 1 :

I- De quoi s'agit-il?

- Rayon et coordonnées du centre d'une sphère à partir de son équation cartésienne.
- Position relative d'une sphère et un plan.
- Plan tangent à une sphère.

II- Indications et commentaires

1) $(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z+2)^2 - 4 + 5 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 4$
S est la sphère de centre $\Omega(1\,;-2\,;-2)$ et de rayon R = 2
Autrement : On peut aussi vérifier que $(-2)^2 + 4^2 + 4^2 - 4\times5 = 16 > 0$ alors S est une sphère de rayon
$R = \dfrac{\sqrt{16}}{2} = 2$ et de centre Ω de coordonnées $\dfrac{2}{2} = 1$; $-\dfrac{4}{2} = -2$ et $-\dfrac{4}{2} = -2$

2) a) $d = d(\Omega, P) = \dfrac{|-1-4+4+2|}{\sqrt{1+4+4}} = 1 < R$ alors l'intersection de P et S est un cercle.

b) Le centre A(x ;y ;z) de C vérifie $\begin{cases} A \in P \\ \overrightarrow{\Omega A} = \alpha \vec{N}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 2z + 2 = 0 \\ x = 1 + \alpha \\ y = -2 - 2\alpha \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases}$

on a alors $1 + \alpha - 2(-2-2\alpha) + 2(-2+2\alpha) + 2 = 0$ d'où $\alpha = \dfrac{-1}{3}$ et $A\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{-4}{3} ; \dfrac{-8}{3}\right)$

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3}$

3) a) On écrit $(a-1)a + (b+2)b - 1 - a + 2b + 3 = a^2 + b^2 - 2a + 4b + 2$
or $M \in S \iff a^2 + b^2 + 1 - 2a + 4b - 4 + 5 = 0 \iff a^2 + b^2 - 2a + 4b + 2 = 0$ d'où $M \in Q$

b) Il suffit de remarquer que $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{n}\begin{pmatrix}a-1\\b+2\\1\end{pmatrix}$ ou $\vec{n}$ est un vecteur normal de Q et $M \in Q \cap S$

donc Q et S sont tangents en M.

EXERCICE 2 :

I- De quoi s'agit-il?

- Equations complexes.
- Equations trigonométriques.
- Interprétation géométrique des nombres complexes :
  - Alignement de trois points
  - Colinéarité de deux vecteurs

II- Indications et commentaires :

I- $\Delta = -3+4i = (1+2i)^2$ alors $z_1 = \dfrac{-i\sqrt{3} - (1+2i)}{2} = \dfrac{-1 - i(\sqrt{3}+2)}{2}$, $z_2 = \dfrac{-i\sqrt{3} + 1 + 2i}{2} = \dfrac{1 + i(2-\sqrt{3})}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \{ z_1 \; ; \; z_2 \}$

II- 1) a) $(\cos\theta + i)^2 = \cos^2\theta - 1 + 2i\cos\theta = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$

b) $\Delta' = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta = (\cos\theta + i)^2$

$z' = -i\sin\theta + \cos\theta + i = \cos\theta + i(1 - \sin\theta)$

$z'' = -\cos\theta - i\sin\theta - i = -\cos\theta - i(1 + \sin\theta)$

$S_{\mathbb{C}} = \{ z' \; ; \; z'' \}$

2°a) Les points A ; B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\cos\theta\\-2\end{pmatrix}$

sont colinéaires c'est à dire $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0$ équivaut à : $-2\cos\theta-2\cos\theta\sin\theta = 0$ équivaut à : $-2\cos\theta\,(1+\sin\theta) = 0$

En remarquant que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; on obtient : $\theta = \frac{\pi}{2}$

Autrement : A ; B et C sont alignés si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) \equiv 0[\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg(\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$(2\sin\theta - 2\cos^2\theta) - 2i\cos\theta(1+\sin\theta) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (car $\theta \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$)

b) $OB = OC \Leftrightarrow \cos^2\theta + (1-\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + (1+\sin\theta)^2 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$

Comme $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on obtient $\theta = 0$. Le rayon de ce cercle est $OB = \sqrt{2}$

PROBLEME :

I- De quoi s'agit-il?

- Fonction logarithmique préliminaire g : variation et signe
- Fonction logarithmique préliminaire f : Limites , variations , asymptote , position de la courbe par rapport à l'asymptote , réciproque ; courbe , calcul d'aire.

II- Indications et commentaires :

I - 1) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $g'(x) = -4x - \frac{1}{x} < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

2) $g(1) = 0$

$0 < x \leq 1$ et g est strictement décroissante donc $g(x) \geq g(1) = 0$

$x > 1$ et g est strictement décroissante donc $g(x) < g(1) = 0$

II- 1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{-1}{x} + \frac{\mathrm{Log}x}{x} - 2x + 2e) = -\infty$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x-(-1+\mathrm{Log}x)}{x^2} - 2 = \dfrac{g(x)}{x^2}$

c)

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	2e-3	↘	$-\infty$

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x+2e) = 0$

b) $f(x) - (-2x+2e) = \dfrac{-1 + \mathrm{Log}x}{x}$

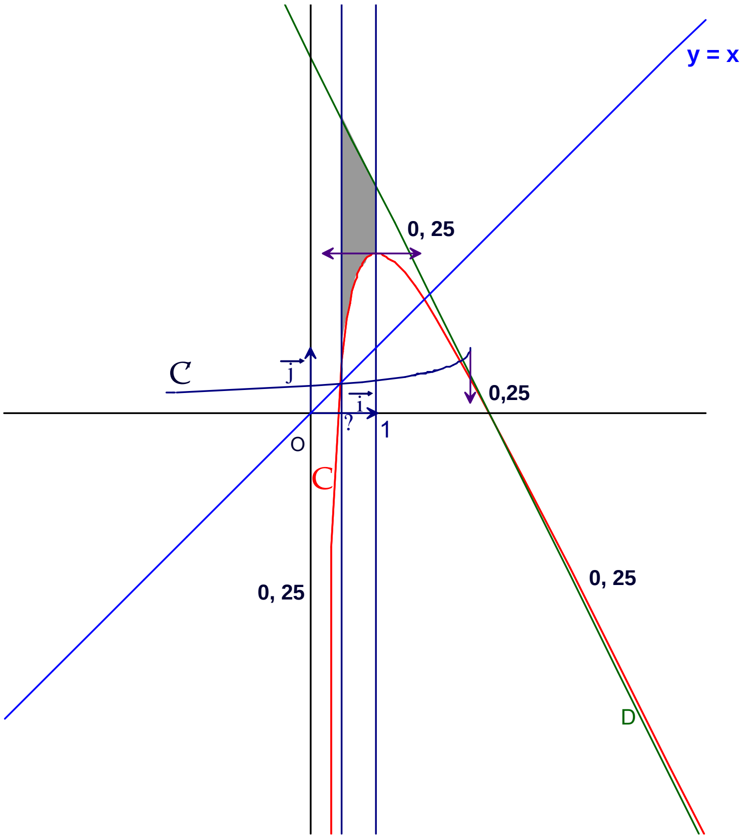
si x < e alors C est au dessous de D
si x > e alors C est au dessus de D

3)a) h est continue et strictement croissante sur]0 ;1]

donc elle réalise une bijection de]0 ;1] sur h(]0 ;1])=]-∞ ; 2e – 3]

b) Puisque h est une bijection de]0 ;1]sur]-∞ ; 2e – 3]et comme 0∈]-∞ ; 2e – 3] alors il existe un unique x_0 de]0 ;1] tel que $h(x_0)=0$ et on a : h(0,4)h(0,5) = -0,15.1,05 < 0 donc $x_0 \in \left]0{,}4\ ;\ 0{,}5\right[$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, la courbe C admet au voisinage de +∞ une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.



III 1) $A(\alpha) = \int_\alpha^1 (\frac{1}{x} - \frac{\text{Log}x}{x})dx = \left[\text{Log}x - \frac{1}{2}\text{Log}^2x\right]_\alpha^1 = \frac{1}{2}\text{Log}^2\alpha - \text{Log}\alpha$

2) $\frac{1}{2}\text{Log}^2\alpha - \text{Log}\alpha = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{Log}\,\alpha = -1$ ou $\text{Log}\,\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{e}$ ou $\alpha = e^3$

comme $\alpha \in \left]0{,}1\right[$; on obtient $\alpha = \frac{1}{e}$.