

Corrigé

EXERCICE 1 :

I- De quoi s'agit-il?

- Rayon et coordonnées du centre d'une sphère à partir de son équation cartésienne.
- Position relative d'une sphère et un plan.
- Plan tangent à une sphère.

II- Indications et commentaires

1) $(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z+2)^2 - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 4$

S est la sphère de centre $\Omega (1 ; -2 ; -2)$ et de rayon $R = 2$

Autrement : On peut aussi vérifier que $(-2)^2 + 4^2 + 4^2 - 4 \times 5 = 16 > 0$ alors S est une sphère de rayon

$$R = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2 \text{ et de centre } \Omega \text{ de coordonnées } \frac{2}{2} = 1 ; -\frac{4}{2} = -2 \text{ et } -\frac{4}{2} = -2$$

2) a) $d = d(\Omega, P) = \frac{|-1-4+4+2|}{\sqrt{1+4+4}} = 1 < R$ alors l'intersection de P et S est un cercle.

b) Le centre $A(x ; y ; z)$ de C vérifie
$$\begin{cases} A \in P \\ \vec{\Omega A} = \alpha \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+2z+2=0 \\ x=1+\alpha \\ y=-2-2\alpha \\ z=-2+2\alpha \end{cases}$$

on a alors $1 + \alpha - 2(-2-2\alpha) + 2(-2+2\alpha) + 2 = 0$ d'où $\alpha = \frac{-1}{3}$ et $A(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{-8}{3})$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3}$$

3) a) On écrit $(a-1)a + (b+2)b - 1 - a + 2b + 3 = a^2 + b^2 - 2a + 4b + 2$

or $M \in S \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 - 2a + 4b - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a + 4b + 2 = 0$ d'où $M \in Q$

b) Il suffit de remarquer que $\vec{\Omega M} = r \begin{pmatrix} a-1 \\ b+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou \vec{n} est un vecteur normal de Q et $M \in Q \cap S$

donc Q et S sont tangents en M.

EXERCICE 2 :

I- De quoi s'agit-il?

- Equations complexes.
- Equations trigonométriques.
- Interprétation géométrique des nombres complexes :
 - Alignement de trois points
 - Colinéarité de deux vecteurs

II- Indications et commentaires :

I- $\Delta = -3+4i = (1+2i)^2$ alors $z_1 = \frac{-i\sqrt{3} - (1+2i)}{2} = \frac{-1 - i(\sqrt{3}+2)}{2}$, $z_2 = \frac{-i\sqrt{3} + 1 + 2i}{2} = \frac{1 + i(2-\sqrt{3})}{2}$

$$S_{\mathcal{L}} = \{ z_1 ; z_2 \}$$

II- 1) a) $(\cos\theta + i)^2 = \cos^2\theta - 1 + 2i\cos\theta = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$

b) $\Delta' = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta = (\cos\theta + i)^2$

$$z' = -i\sin\theta + \cos\theta + i = \cos\theta + i(1-\sin\theta)$$

$$z'' = -\cos\theta - i\sin\theta - i = -\cos\theta - i(1+\sin\theta)$$

$$S_{\mathcal{L}} = \{ z' ; z'' \}$$

2°a) Les points A ; B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2\cos\theta \\ -2 \end{pmatrix}$

sont colinéaires c'est à dire $\det(\vec{AB}, \vec{BC}) = 0$.

$$\det(\vec{AB}, \vec{BC}) = 0 \text{ équivaut à : } -2\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0 \text{ équivaut à : } -2\cos\theta(1+\sin\theta) = 0$$

En remarquant que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; on obtient : $\theta = \frac{\pi}{2}$

Autrement : A ; B et C sont alignés si et seulement si $(\vec{AB} \text{ ; } \vec{BC}) \equiv 0[\pi]$

$$(\vec{AB} \text{ ; } \vec{BC}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z_{\vec{BC}}}{Z_{\vec{AB}}}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{Z_{\vec{BC}}}{Z_{\vec{AB}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$(2\sin\theta - 2\cos^2\theta) - 2i\cos\theta(1+\sin\theta) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{car } \theta \in [0; \frac{\pi}{2}])$$

$$b) OB = OC \Leftrightarrow \cos^2\theta + (1-\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + (1+\sin\theta)^2 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$$

Comme $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on obtient $\theta = 0$. Le rayon de ce cercle est $OB = \sqrt{2}$

PROBLEME :

I- De quoi s'agit-il?

- Fonction logarithmique préliminaire g : variation et signe
- Fonction logarithmique préliminaire f : Limites , variations , asymptote , position de la courbe par rapport à l'asymptote , réciproque ; courbe , calcul d'aire.

II- Indications et commentaires :

I - 1) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $g'(x) = -4x - \frac{1}{x} < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

$$2) g(1) = 0$$

$0 < x \leq 1$ et g est strictement décroissante donc $g(x) \geq g(1) = 0$

$x > 1$ et g est strictement décroissante donc $g(x) < g(1) = 0$

$$\text{II- 1) a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} + \frac{\text{Log}x}{x} - 2x + 2e \right) = -\infty$$

$$b) f'(x) = \frac{1}{x^2} x(-1 + \text{Log}x) - 2 = \frac{g(x)}{x^2}$$

c)

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	$2e-3$	$-\infty$

$$2)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-2x + 2e) = 0$$

$$b) f(x) - (-2x + 2e) = \frac{-1 + \text{Log}x}{x}$$

si $x < e$ alors C est au dessous de D

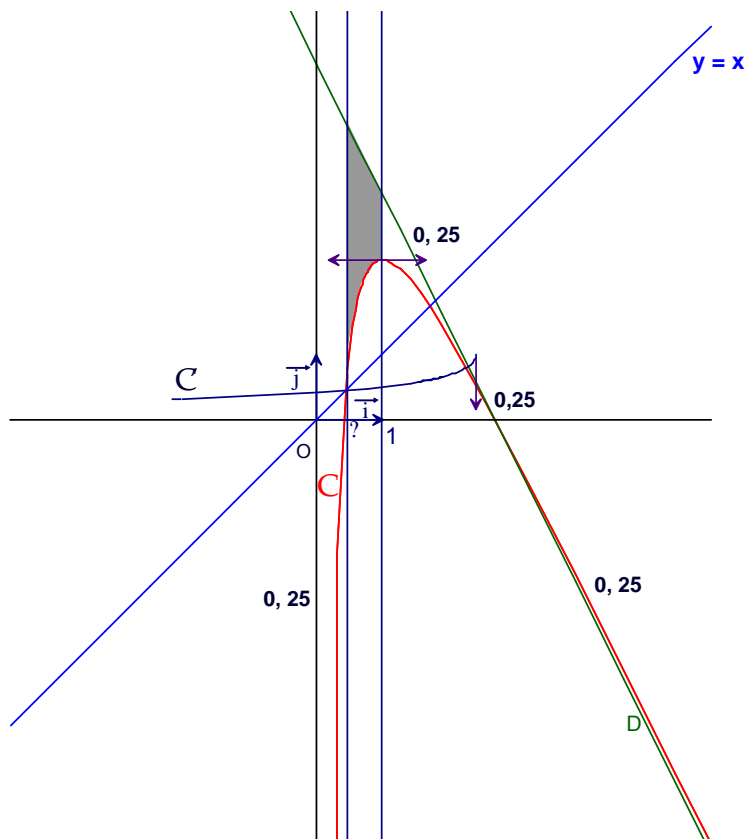
si $x > e$ alors C est au dessus de D

3)a) h est continue et strictement croissante sur $]0 ; 1[$

donc elle réalise une bijection de $]0 ; 1[$ sur $h(]0 ; 1[) =]-\infty ; 2e - 3]$

b) Puisque h est une bijection de $]0 ; 1[$ sur $]-\infty ; 2e - 3]$ et comme $0 \in]-\infty ; 2e - 3]$ alors il existe un unique x_0 de $]0 ; 1[$ tel que $h(x_0) = 0$ et on a : $h(0,4)h(0,5) = -0,15 \cdot 1,05 < 0$ donc $x_0 \in]0,4 ; 0,5[$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, la courbe C admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.



$$\text{III 1) } A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{\text{Log} x}{x} \right) dx = \left[\text{Log} x - \frac{1}{2} \text{Log}^2 x \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{2} \text{Log}^2 \alpha - \text{Log} \alpha$$

$$2) \frac{1}{2} \text{Log}^2 \alpha - \text{Log} \alpha = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{Log} \alpha = -1 \text{ ou } \text{Log} \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{e} \text{ ou } \alpha = e^3$$

comme $\alpha \in]0, 1[$; on obtient $\alpha = \frac{1}{e}$.