REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2005

SESSION DE CONTROLE

SECTIONS : SCIENCES EX . + TECHNIQUE
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 3 h COEFFICIENT : 3

EXERCICE 1 (5 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1) a – Vérifier que $(e^{i\theta} - i)^2 = -1 + e^{2i\theta} - 2ie^{i\theta}$
   b – Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 - 2i\,Z + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0.$$

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i - e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a – Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}_1$ décrit par le point M_1 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$
   b – Calculer l'affixe du milieu I du segment $[M_1 M_2]$.
   c – Déduire l'ensemble $\mathscr{C}_2$ décrit par le point M_2 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$. Construire $\mathscr{C}_2$.

3) a – Montrer que $(M_1 M_2)^2 = 8(1 - \sin\theta)$
   b – Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 est maximale.

EXERCICE N°2 (5 points)

Une urne contient trois boules rouges et deux boules vertes.

1) On tire simultanément trois boules de l'urne.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « Obtenir une seule boule rouge »
   B : « Obtenir trois boules de même couleur »

2) Une épreuve consiste à faire des tirages successifs sans remise d'une boule. On s'arrête dès qu'on obtient une boule rouge.
   a – Soit C l'événement : « L'épreuve s'arrête au deuxième tirage »
   Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{3}{10}$.
   b – Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve associe le rang de la première boule rouge tirée.
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[\setminus \{e\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{1 - \text{Log}\, x} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq e \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A – 1) a – Montrer que f est continue à droite en 0.

b – Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat.

2) a - Calculer $\lim\limits_{x \to e+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$. Interpréter le résultat.

b – Montrer que la droite Δ : $y = x$ est une asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de ($+\infty$).

c – Etudier la position relative de ($\mathscr{C}$) et Δ.

3) a – Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{e\}$ on a $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x(1-\text{Log}\, x)^2}$

b – Dresser le tableau de variation de f.

4) a – Déterminer une équation de la tangente D à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 1.

b – Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x\,\text{Log}\, x - x + 1$.

Etudier le sens de variation de h et en déduire le signe de h(x).

c – Déterminer la position relative de ($\mathscr{C}$) et D.

5) Construire Δ , D et ($\mathscr{C}$).

B – On pose $J = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x\,\text{Log}\, x)\, dx$.

1) a – Montrer que $J = \dfrac{\text{Log}\, 2}{8} - \dfrac{3}{16}$

b – En déduire la valeur de $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x + 1 - x\,\text{Log}\, x)\, dx$

2) a – Montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ on a : $2x \leqslant f(x) \leqslant x + 1 - x\,\text{Log}\, x$

b – Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

Montrer que $\dfrac{3}{4} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \dfrac{17}{16} - \dfrac{\text{Log}\, 2}{8}$.