Enoncé

EXERCICE N°1 (5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble ℂ des nombres complexes l'équation :
$$(1 + i) z^2 – 2 z + 1 – i = 0$$
2) Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.
Résoudre dans ℂ l'équation : $mz^2 - 2z + \overline{m} = 0$. (E)
où $\overline{m}$ est le nombre complexe conjugué de m.
3) Dans toute la suite on prend $m = \sqrt{2}e^{ia}$ où α est un réel .
   a- Montrer que les racines z' et z'' de l'équation (E) s'écrivent sous la forme :
   $z' = e^{i(\frac{\pi}{4} - \alpha)}$ et $z'' = e^{-i(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$
   b- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z'' et par M le point d'affixe z'+ z''. Montrer que $\frac{z'}{z''} = i$. En déduire que les vecteurs $\vec{OM'}$ $\vec{OM''}$ sont orthogonaux.
   c- Montrer que le quadrilatère OM' MM'' est un carré.

EXERCICE N°2 (5 points)

L'espace E étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(–1, –1, 1) ; B(–1, 2, – 2) et le plan (P) dont une équation cartésienne est :
x + y + z – 2 = 0

1) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (P).
2) Soit α un réel et Sα l'ensemble des points M(x, y, z) de E tels que :
   x2 + y2 + z2 + 2 x – 2 αy + 2 αz + α2 + α= 0.
   a- Montrer que, pour tout réel α, Sα est une sphère de centre Iα (–1, α, –α) et de rayon.
   b- Montrer que, quand α varie dans IR, Iα décrit la droite (AB).

3) Etudier, suivant les valeurs de α , les positions relatives de Sα et du plan (P).
4) Soit I le milieu de [AB] et I1–a le centre de la sphère S1–a .
   a- Montrer que I est le milieu du segment [Iα I1–α] .
   b- En déduire que les sphères Sα et S1–α sont symétriques par rapport au point I.

PROBLEME (10 points)

A - Soit u la fonction définie sur IR par : $u(x) = x e^x – e^x + 1$

1) a- Dresser le tableau de variation de la fonction u et en déduire que u(x)≥ 0 pour tout réel x.
   b- Montrer que, pour tout réel x, on a : $u(x) = \int_0^x te^t dt$
2) a- Montrer que, pour 0≤ t ≤x on a : $t \le te^t \le te^x$ et en déduire que, pour tout réel positif x, on a :
$$\frac{1}{2}x^2 \le u(x) \le \frac{1}{2}x^2 e^x \quad (1)$$

b- Montrer que, pour $x \leq t \leq 0$, on a : $t \leq t\,e^t \leq t\,ex$ et en déduire que, pour tout réel négatif x, on a : $\frac{1}{2}x^2e^x \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^2$ (2)

3) a- Calculer, en utilisant les relations (1) et (2), la limite de $\frac{u(x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

b- En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{u(x)}{x(e^x-1)} = \frac{1}{2}$.

B- On considère la fonction numérique f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0 = 1 \end{cases}$$

1) a- Montrer que f est continue en 0.

b- Vérifier que $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{u(x)}{x(e^x-1)} - 1$

c- En déduire que f est dérivable en 0 et calculer f'(0) .

2) a- Montrer que, pour $x \neq 0$, on a : $f'(x) = -\frac{u(x)}{(e^x-1)^2}$

b- Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Montrer que (C) admet au voisinage de - ∞ une asymptote oblique (Δ) dont on donnera une équation cartésienne.

b- Tracer la courbe (C) et la droite (Δ).