



## Corrigé de l'exercice 1

### I) De quoi s'agit-il ?

Représentation paramétrique d'une droite

Equation d'un plan. Position relative de deux plans. Position relative d'un plan et d'une sphère.

Equation d'une sphère. Calcul de distances.

### II) Indications et commentaires

#### 1) Représentation paramétrique de la droite (AB).

Traduire  $M(x,y,z) \in (AB)$  par : il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{AM} = a \vec{AB}$ . Ou bien : on peut appliquer directement les formules : une représentation paramétrique d'une droite est de la

forme :  $\begin{cases} x = x_0 + a\alpha \\ y = y_0 + b\alpha \\ z = z_0 + c\alpha \end{cases}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) avec  $(x_0, y_0, z_0)$  coordonnées de A (ou de B) et  $\vec{AB} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  on obtient

alors le système suivant :  $\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = 2 - 4\alpha \end{cases}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )

#### 2) a) Equation cartésienne de P :

\* Le vecteur  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à P; donc une équation cartésienne de P est de la

forme :  $-2x + 2y - 4z + d = 0$  où d est un réel à déterminer.

\* Pour obtenir d, traduire que  $A \in P$ .

Remarques : En général, pour traduire qu'un point appartient à un plan, on écrit que les coordonnées du point vérifient l'équation du plan c'est-à-dire remplacer x,y et z par ses coordonnées.

\* On peut remplacer un vecteur normal à un plan par un autre vecteur (colinéaire au 1<sup>er</sup>) et dont les coordonnées sont plus simples.

\* Trouver qu'une équation cartésienne de P (la plus simple) est alors : «P :  $-x + y - 2z + 6 = 0$ ».

#### b) Vérification que Q passe par B

Utiliser la remarque plus haut pour vérifier que  $B \in Q$

Vérification que Q est parallèle à P.

L'équation de Q permet de conclure que  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à Q.

Vérifier que  $\vec{n}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires.

Conclure que  $P // Q$ .

#### 3) a) Montrer que I appartient à (AB)

Dans ce cas il s'agit de prouver que I, A et B sont alignés.

I est le centre de la sphère tangente à Q en B donc  $(IB) \perp Q$ . or  $P // Q$  donc  $(IB) \perp P$  et puisque  $(AB) \perp P$  on conclut que  $(IB) // (AB)$  et par suite I, A et B sont alignés, ainsi  $I \in (AB)$ .

### b) Dédution des relations $b=-a$ et $c=2a$

Traduire que  $I \in (AB)$  par le fait que les coordonnées de I vérifient la représentation paramétrique de  $(AB)$  trouvée en première question. Ce qui donne un système de 3 équations à 4 inconnues a, b, c et  $\alpha$ , en éliminant  $\alpha$ , on obtient :  $b=-a$  et  $c=2a$ .

### c) montrer que $IA^2 - IB^2 = 12$ .

Penser à utiliser la formule donnant le rayon r du cercle d'intersection d'une sphère de rayon R de centre I et d'un plan P.

Rappel : on a :  $(r = \sqrt{R^2 - d^2}, d = d(I, P))$

On sait que  $IA = d(I, P)$  (car  $(IA) \perp P$  et  $A \in P$ ) et  $IB = R$  (sphère tangente à Q en B).

Appliquer la formule donnant la distance de 2 points à l'aide de leurs coordonnées pour exprimer  $IA^2$  et  $IB^2$  en fonction de a, b et c. Remplacer alors dans la relation  $IA^2 - IB^2 = 12$  qui donne :  $a-b+2c = 3$  (ne pas oublier de simplifier).

### d) Calcul des coordonnées de I

Les 2 relations obtenues dans la question 3°)b) permettent de transformer la relation 3°)c) en une équation du 1<sup>er</sup> degré en a et par la même de calculer a

on obtient :  $a = \frac{1}{2}$  ;  $b = -\frac{1}{2}$  et  $c = 1$  d'où  $I(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ .

\* Equation cartésienne de (S).

On calcule le rayon de (S) qui est IB. (Trouver  $IB = \sqrt{\frac{27}{2}}$ ).

Appliquer la formule donnant l'équation d'une sphère connaissant son rayon et les coordonnées de son centre.

D'où S :  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (z - 1)^2 = \frac{27}{2}$ .