Corrigé de l'exercice 1

De quoi s'agit-il ?

Produit scalaire dans l'espace - Distance de deux plans - Droite perpendiculaire à un plan - Equation d'une sphère.

II) Indications et commentaires

1) a) Calcul de AB, AC et $\vec{AB}$. $\vec{AC}$

Dans le cas général pour calculer une distance de 2 points, on applique la formule
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Dans le cas présent, on doit déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ qui serviront à calculer AB, AC et $\vec{AB}$. $\vec{AC}$.

Rappel si $\vec{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ on a AB = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $\vec{AB}$. $\vec{AC}$ =xx'+yy'+zz' ;

En utilisant les coordonnées de A et B on a : $\vec{AB}\begin{pmatrix} xB - xA \\ yB - yA \\ zB - zA \end{pmatrix}$.

Vérifier que : AB= $\sqrt{2}$; AC=$\sqrt{2}$ et $\vec{AB}.\vec{AC} = 0$

Déduction : puisque AB = AC, le triangle est isocèle et de $\vec{AB}.\vec{AC} = 0$ on déduit $B\hat{A}C$ est un angle droit. D'où le résultat demandé.

b) A, B et C définissent un plan d'équation x+z-1=0

Remarque : puisque l'équation du plan est donnée, il suffit de vérifier que les 3 points ne sont pas alignés (ce qui est fait dans la question a) : ABC est un triangle…) et que les coordonnées de chacun vérifient l'équation donnée.
Autrement : on peut chercher l'équation du plan (A, B, C) en utilisant la relation
$\vec{AC} = a\ \vec{AB} + b\vec{AC}$ qui donne une représentation paramétrique du plan :

vérifier que (A, B, C) : $\begin{cases} x - 1 = -\beta & (1) \\ y = \sqrt{2}\,a & \\ z = \beta & (2) \end{cases}$ ($\alpha \in$ IR , $\beta \in$ IR)

D'où on déduit une équation cartésienne en éliminant α et β du système précédent par combinaison linéaire. On remarque qu'il suffit de faire (1)+(2).

2) a) I milieu de [BC] appartient à D

Calculer les coordonnées de I et remarquer qu'elles sont de la forme (m, $\frac{\sqrt{2}}{2}$,m) d'où I=M et par suite I$\in\Delta$.(On trouve I correspond à m=$\frac{1}{2}$).

b) Pour I [1] M, $\vec{IM}$ est un vecteur normal à P

Calculer les coordonnées de $\vec{IM}$ et celles de $\vec{n_p}$ un vecteur normal et vérifier que $\vec{IM}$ et $\vec{n_p}$

sont colinéaires et par suite $\overrightarrow{IM}$ est un vecteur normal à P. (On trouve $\overrightarrow{IM} = (m-\frac{1}{2})\overrightarrow{n_p}$.

c) D **est la droite perpendiculaire à P en I.**

Il s'agit d'une déduction : Donc utiliser les résultats précédents : B et C appartiennent à P (d'après 1)b) que peut on conclure pour I ?

Ne pas oublier que Δ est la droite (IM), donc $\overrightarrow{n_p}$ est un vecteur directeur de Δ. Conclure (Δ⊥P).

3)a) Trouver m_1 et m_2 valeurs de m pour que MBC soit rectangle en M

Utiliser la propriété : MBC est un triangle rectangle en M $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.
On trouve une équation du 2é degré en m qu'on résoud pour obtenir les solutions. (m_1 = $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et m_2 = $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$)

b) * M_1 , M_2 , A, B et C appartiennent à une même sphère

Dans le cas présent on utilise les questions précédentes : M_1BC, M_2BC et ABC sont tous des triangles rectangles d'hypothènuse [BC].
Par suite M_1 appartient à la sphère de diamètre [BC]. Peut-on conclure aussi pour M_2 et A.
* <u>Equation cartésienne de cette sphère</u> (on la désigne par (S))
Deux méthodes possibles :
(1) : on a les coordonnées de B et celles de C on écrit M(x, y, z) ∈ (S) si et seulement si $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$ $((x-x_B)(x-x_C)+(y-y_B)(y-y_C)+(z-z_B)(z-z_C) = 0)$
(2) : Le centre de la sphère $I(x_0, y_0, z_0)$ est milieu de [BC]. Le rayon de la sphère R = $\frac{BC}{2}$ et on applique la formule : (S) : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$.
Vérifier que (S) : $x^2+y^2+z^2-x-\sqrt{2}\,y-z = 0$