

Corrigé du problème

I - De quoi s'agit-il :

- Etude d'une fonction en exponentielle. Calcul d'aire.
- Famille de fonctions définies à l'aide d'une intégrale.
- Encadrement de e par deux sommes finies.

II - Indications et commentaires :

1) Variations de g :

Vérifier que $g'(x) = (x - 2)e^{-x}$

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$1 - e^{-2}$	1

Remarquer que $g(2)$ est le minimum de g . Conclure.

2) a) Variations de f :

Vérifier que $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1 = g(x)$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) * Δ : $y = x$ est une asymptote à C :

Il suffit de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

et on a $f(x) - x = xe^{-x}$

*** Position relative de C et Δ.**

Etudier le signe de $f(x) - x$ et vérifier que :

si $x < 0$ Δ est au dessus de C.

si $x > 0$ Δ est en dessous de C.

c) Courbe de f :

Remarques :

* $f'(0) = 2$ donc

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente

à C au point O

* $f'(x) = (x-2)e^{-x}$

Prouver que le point de C d'abscisse 2

est un point d'inflexion de C.

3)

a) Calcul de $A(\alpha)$:

• Hachurer la surface correspondante.

• Vérifier que : $A(\alpha) = \int_c^\alpha te^{-t} dt$. u . a.

• Utiliser une intégration par parties en posant :

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = e^{-t}.$$

• Prouver que $A(\alpha) = (-\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1) u . a$

b) Vérifier que $A(1) = 1 - \frac{2}{e}$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = 1$

II -

1) On a :

$$F_1(x) = \int_c^x te^{-t} dt = A(x)$$

2) a) $n \geq 2$ $F_n(x) = nF_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$:

$$F_n(x) = \int_c^x t^n e^{-t} dt.$$

Utiliser une intégration par parties en posant :

$$u(t) = t^n$$

$$v'(t) = e^{-t}.$$

b) Par récurrence : $F_n(x) = n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right)$

• Pour $n = 1$ Vérifier que $1! \left(1 - \left(e^{-x} + \frac{x}{1!} e^{-x} \right) \right) = 1 - (1+x) e^{-x}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons l'égalité :

$$F_n(x) = n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right).$$

a-t-on :

$$F_{n+1}(x) = (n+1)! \left(1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right).$$

On a :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= (n+1) F_n(x) - x^{n+1} e^{-x} \\ &= (n+1) n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right) - x^{n+1} e^{-x} \\ &= (n+1)! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} \right). \end{aligned}$$

Terminer :

Remarques :

pour $x \neq 0$ $x^0 = 1$ $0! = 1! = 1$. $n! (n+1) = (n+1)!$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$:

Il suffit de calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x}$.

On pourra poser $x = kX$. puis vérifier que :

$$x^k e^{-x} = k^k (Xe^{-X})^k$$

Prouver alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x} = 0$. et que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k e^{-x}}{k!} \right) = 0 \text{ (somme finie).}$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = n!$

3) Pour $t \in [0, x]$ on a : $e^{-x} \leq e^{-t} \leq 1$.

et par conséquent $t^n e^{-x} \leq t^n e^{-t} \leq t^n$.

$$\text{d'où } \int_c^x t^n e^{-x} dt \leq \int_c^x t^n e^{-t} dt \leq \int_c^x t^n dt.$$

Terminer

4) a) $x > 0 \quad n \geq 2x : \frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$

Remarque

$n \geq 2x > 0$ donc $n \geq 1$.

• Vérifier que $\frac{x}{n} \leq \frac{1}{2}$ puis multiplier les deux membres par : $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

On pourra montrer que $0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(par récurrence ou par itération de l'inégalité établie dans (a))

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Conclure.

c) $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} :$

d'après **II 2) b)** $\frac{F_n(x)}{n!} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}$

donc : $e^x = \frac{F_n(x)}{n!} e^x + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

d'après **II 3)** : $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{F_n(x)}{n!} e^x \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$

en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{F_n(x)}{n!} e^x \right) = 0$. et conclure.

5) a) • Ecrire que $F_n(1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} e^{-1} \geq 0 \quad (\text{ puis multiplier par } e)$$

On obtient

$$e \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

• Ecrire que $F_n(1) \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire que :

$$\left. \begin{array}{l} e \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e}{(n+1)!} \\ - \text{ pour } n \geq 2, \frac{e}{(n+1)!} \times \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!} \\ - \text{ pour } n = 1 \quad e \leq \sum_{k=0}^1 \frac{1}{k!} + \frac{1}{1!} \end{array} \right\} \text{ donc : } e \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

b) Encadrement de e d'amplitude d < 10⁻² :

$$d = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \right) - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{n!}.$$

Pour obtenir $d < 10^{-2}$, il suffit de choisir : $n = 5$

Vérifier que : $2,71 < x < 2,72$.