



Corrigé de l'exercice 2

I) De quoi s'agit-il ?

Equation du second degré dans \mathbb{C} avec un paramètre
Hyperbole, tangente en un point

II) Indications et commentaires

$$1^\circ) (E_u) : z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2i\bar{u} = 0$$

Résolution de (E_u) dans \mathbb{C}

Remarquer que (E_u) est de la forme $Z^2 - SZ + P = 0$ où S et P sont respectivement la somme et le produit des solutions de l'équation, ce qui permettra de déduire que

$$z' = 2u \text{ et } z'' = -i\bar{u}$$

Si on n'a pas remarqué cette écriture de (E_u) , on calcule Δ et on trouve $\Delta = (2u + i\bar{u})^2$

Achever le calcul

$$2^\circ) A(2i), M(u), M'(2u) \text{ et } M''(-i\bar{u})$$

a) Equation cartésienne de (H)

Se rappeler que

$$(A, M \text{ et } M' \text{ alignés}) \iff (\vec{AM} \text{ et } \vec{AM'} \text{ colinéaires}) \iff \det(\vec{AM}, \vec{AM'}) = 0$$

Pour déterminer les coordonnées des points M' et M'' , on doit écrire le nombre complexe u sous la forme algébrique

$$\text{Poser } u = x + iy \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Vérifier que } M(x, y) \in (H) \iff x^2 - y^2 + 2x + y = 0$$

b) (H) est une hyperbole

Penser à déterminer l'équation réduite de (H) ; et pour cela vérifier que : (H) :

$$(x+1)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)} - \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)} - 1 = 0$$

En déduire que l'équation réduite de (H) est $\frac{X^2}{\left(\frac{3}{4}\right)} - \frac{Y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)} - 1 = 0$ dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

où $\Omega \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Conclure que (H) est une hyperbole équilatère de sommets $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$ et $S'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$,

d'asymptotes $(\Delta_1) : 2x - 2y + 3 = 0$ et $(\Delta_2) : 2x + 2y + 1 = 0$ et de foyers $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$

(ces coordonnées sont dans le repère $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$).

c) (H) passe par O

Constater que les coordonnées de O vérifient l'équation $x^2 - y^2 + 2x + y = 0$ et conclure

Equation cartésienne de la tangente à (H) en O

Dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (H) : $\frac{X^2}{\frac{3}{4}} - \frac{Y^2}{\frac{3}{4}} - 1 = 0$ et $O(1, -\frac{1}{2})$ dans R'

Se rappeler qu'en tout point $N(X_0, Y_0)$ de (H) l'équation de la tangente est :

$$\frac{X_0 X}{a^2} - \frac{Y_0 Y}{b^2} - 1 = 0 \text{ (dans } R').$$

Vérifier que la tangente à (H) en O a pour équation : $2x+y=0$ dans le repère $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

