Corrigé du Problème

I) De quoi s'agit-il ?

A : Résolution d'une équation paramétrique du second degrés dans $\mathbb{C}$
B : Similitudes directes sous la forme complexe
(composée- Réciproque- homothéties - translations - rotation- Construction et recherche d'ensembles de points)

II) Indications et commentaires

I 1) Montrons que $P(m)=(2im+i+4)^2$
Développer $(2im+i+4)^2$ et montrer que c'est égal à $-4m^2-4m(1-4i)+15+8i$

2)a)Les deux solutions de (E)
(E) est une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ avec un paramètre m dans $\mathbb{C}$
Vérifier que : $\Delta=(2im+i+4)^2=P(m)$
et que les solutions dans $\mathbb{C}$ sont $Z=m(1+i)+2+3i$ et $Z'=m(1-i)-2+2i$

b) m solution de (E)
Remarquer que : m est solution de (E)$\Leftrightarrow m=m(1+i)+2+3i$ ou $m=m(1-i)-2+2i$
En déduire que
$m=2+2i$ ou $m=-3+2i$

II) Dans cette partie, on considère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan et M un point d'affixe un nombre complexe m

$S : P \longrightarrow p$
$M(m) \longrightarrow Q(Z=(1+I)m+2+3i$
Et
$S' : P \longrightarrow P$
$M(m) \longrightarrow Q'(Z'=(1+I)m+2+3i$

Remarquer que les affixes de Q et Q' sont les solutions de l'équation (E).

1) Eléments caractéristiques de la similitude S
Remarquer que Z est de la forme am+b avec $a = 1+i$ et $a\neq1$ et $b=2+3i$
Utiliser que le rapport est |a| ; l'angle est arga et le centre de S est le point Ω_1 d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$
Vérifier que S est la similitude directe de centre $\Omega_1(-3+2i)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

*** Eléments caractéristiques de S'**
Vérifier que S' est la similitude directe de centre $\Omega_2(2+2i)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $(-\dfrac{\pi}{4})$
Remarquer que les triangles Ω_1MQ et Ω_2MQ' sont rectangles.

2°) S'oS est une homothétie
Se rappeler que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe d'angle la somme des angles
En déduire que S'oS est une similitude directe d'angle nul
Or une similitude directe d'angle nul est soit une translation lorsque le rapport est égal à 1, soit une homothétie lorsque le rapport est différent de 1
En déduire que S'oS est une homothétie de rapport 2, de centre J(-3-3i).

3°) l'application f qui transforme Q en Q'

D'après la définition des points Q et Q', pour passe de Q à Q' on peut passer de Q à M puis de M à Q' ce qui nous donne que : $Q(Z) \xrightarrow{S^{-1}} M(m) \xrightarrow{S'} Q'(Z')$

$f = S' o S^{-1}$

L'expression de S^{-1}

On a : $Z=(1+i)m+2+3i$

En déduire que $m=\frac{1}{2}(1-i)Z-\frac{5}{2}-\frac{i}{2}$

L'expression de $S' o S^{-1}$

$Q(Z)= \longrightarrow M(m=\frac{1}{2}(1-i)Z-\frac{5}{2}-\frac{i}{2}) \longrightarrow Q'(Z'=(1-i)Z-2+2i)$.

* Vérifier que : $Z'=-iZ+4i-5$.

Z' est de la forme $aZ+b$ avec $|a|=1$ et $\arg a \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

En déduire que f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}i)$

Remarque

Pour la nature de f, on peut la déterminer à partir de celles de S^{-1} et S'. Toutes les deux sont des similitudes directes de même angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport inverses $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{2}$. Et par suite f est une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport 1.Ce qui fait qu'elle est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Seulement, cette méthode ne permet pars de déterminer le centre.

4°) soit I le milieu de [QQ'] et I=t(M)

a) t est une translation à caractériser

Il s'agit d'exprimer l'affixe de I en fonction de l'affixe de M

Comme on a Q(Z) et Q'(Z') alors $I(\frac{Z+Z'}{2})$

Remplacer Z et Z' en fonction de m et vérifier que l'affixe de I est $m+\frac{5}{2}i$

$t : M(m) \longrightarrow I(m+\frac{5}{2}i)$

Vérifier que l'affixe de $\vec{MI}$ est égal à $\frac{5}{2}i$.

$\vec{MI}$ est constant, en déduire que t est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

b) Pour Q¹W, (WI)^(QQ')

* Remarquer que si Q≠Ω, alors QΩQ' est un triangle rectangle isocèle en Ω.

* En déduire que (IΩ) est la médiatrice de [QQ']. Conclure

Remarque : IΩ=IQ=IQ'

5°)a) Construction des points Q et Q'

* Construire $I = t_{\vec{u}}(M)$
* Si $I=\Omega$ alors $Q=Q'=I=\Omega$
* Si $I\neq\Omega$; Construire la perpendiculaire à $(I\Omega)$ en I.

Placer Q et Q' sur cette perpendiculaire en utilisant 4°)b)

b) Q donné, Construction de M et Q'

On donne un point Q.

* Si $Q=\Omega$ alors $Q'=Q=I=\Omega$ et $M = t_{-\vec{u}}(\Omega)$

Si $Q\neq\Omega$, Construire $Q'=f(Q)$, puis $I=Q*Q'$ et $M = t_{-\vec{u}}(I)$

6)Soit M un point du plan

a) L'ensemble de points M tels que M, Q et Q' soient alignés

Vérifier que : M, Q et Q' sont alignés$\Leftrightarrow$ M, Q, Q' et I sont alignés.

Vérifier que (MI)//(OJ)

En déduire que

(M, Q et Q') alignés $\Leftrightarrow$ $(QQ')//(O, \vec{j}) \Leftrightarrow (I\Omega)//(O\ \vec{i})$

Prouver que I décrit la droite $\Delta : y=\frac{9}{2}$

En déduire que M décrit la droite $\Delta' : y=2$ avec $M = t_{-\vec{u}}(I)$

b) L'ensemble de points Q

On a C=S(M)

M décrit Δ'. En déduire que Q décrit la droite $S(\Delta')$

Remarquer que $\Omega_1\in\Delta'$ et $\Omega_2\in\Delta'$).

Et $\left(\Delta', \widehat{S(\Delta')}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$

De même, $Q'=S'(M)$ décrit $S'(\Delta')$ qui passe par Ω_2 et forme l'angle $(-\frac{\pi}{4})$ avec Δ'