Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Exercice n°1 (6 points)
Suites réelles :

- Suites récurrentes, calcul des termes
- Suite minorée
- Suite croissante
- Suite géométrique, calcul du terme général, calcul de la somme des n premiers termes
- Détermination de la plus petite valeur n_0 de n pour que S_n soit supérieure à 1000.

II) Indications et commentaires

Exercice n°1 :

1°) a) Calcul de U_1 et U_2

Le calcul est simple et donne $U_1 = 3$ et $U_2 = 5$. Il montre que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique. ($U_2 - U_1 \neq U_1 - U_2$ et $\frac{U2}{U1} \neq \frac{U1}{U0}$)

b) pour tout entier naturel n, on a $u_n>1$

Penser à faire une démonstration par récurrence :

- Première étape : vérification au rang 0. On a bien $U_0 = 2$ et $2 > 1$
- Deuxième étape : hérédité de la propriété P_n : « $U_n > 1$ ». Soit p un entier naturel, supposer que $U_p > 1$ et démontrons alors que $U_{p+1} > 1$.
- Conclure que pour tout entier naturel n, on a $U_n > 1$.

<u>Principe du raisonnement par récurrence</u>

Démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n se fait en deux étapes :

- On prouve qu'elle est vraie pour n = 0
- On montre qu'elle est héréditaire, c'est à dire que si elle est vraie pour un entier naturel p, alors elle est vraie pour p+1.

c) (U_n) est strictement croissante

Exploiter la question b) pour montrer que $U_{n+1} – U_n > 0$ et conclure.

Remarque :

Si (U_n) est une suite à termes strictement positifs, alors (U_n) est croissante (respectivement décroissante) si, et seulement si : pour tout entier naturel n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ (respect $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$)

2°) a) (V_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2

Montrer que $V_{n+1}=2V_n$ et $V_0=1$. Puis conclure.

Les suites arithmétiques et géométriques ne figurent pas explicitement au programme de terminale, cependant elles peuvent faire l'objet de nombreux exercices et apparaître dans toute les parties du cours. Il est donc important de bien connaître les formules et les caractéristiques de ces deux types de suites.

b) Calcul de V_n et U_n en fonction de n

- Montrer que $V_n=2^n$ et conclure que $U_n=2^n+1$
- Vérifier que $U_n=2^n+1$ est vrai pour $n\in\{0,1,2\}$ pour s'assurer de votre calcul.

3°) a) Calcul de la somme $S_n=v_0+v_1+\ldots v_{n-1}$ en fonction de n

On a $S_n = v_0 \dfrac{2^n-1}{2-1}$ c'est à dire $S_n = 2^n - 1$

b) Détermination de la plus petite valeur n_0 de n pour que Sn soit supérieur ou égale à 1000.

On a
$$\begin{aligned} S_n \geq 1000 &\Leftrightarrow 2^n - 1 \geq 1000 \\ &\Leftrightarrow 2^n \geq 1001 \\ &\Leftrightarrow n\mathrm{Log}\,2 \geq \mathrm{Log}1001 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\mathrm{Log}1001}{\mathrm{Log}2} \\ &\Leftrightarrow n \geq 9{,}96 \end{aligned}$$

d'où $n_0=10$.