Corrigé de l'exercice 2

I) De quoi s'agit-il ?

Probabilités usuelles : cas d'équiprobabilité
Variable aléatoire : loi de probabilité - Fonction de répartition
Loi binomiale : espérance mathématique - variance

II) Indications et commentaires

1°) Détermination de la probabilité de l'événement E : "Les trois chemises achetées sont de marques locales"

Puisque les issues de l'expérience aléatoire (achat des chemises) sont équiprobables (choix au hasard) alors la probabilité de l'événement E s'obtient par la relation :

$$\text{Prob(E)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de E}}{\text{nombre de cas possibles}} \qquad \text{(Equiprobabilité)}$$

- Montrer alors que Prob (E) = $\frac{5}{28}$.

  On peut recourir aux tirages simultanés dans une urne :
  l'achat de trois chemises de marques locales, peut être "modélisé" par le tirage simultané de trois boules marquées L (marque locale) d'une urne contenant cinq boules marquées L et trois boules marquées E (marque étrangère)

Remarque :
Le recours aux tirages dans une urne n'est qu'un modèle ; ne pensez pas que toutes les situations s'y ramènent.

2°) Détermination de la probabilité de l'événement F : "L'une au moins des trois chemises achetées est de marque étrangère"

- Remarquer que l'événement $\overline{F}$ contraire de F, n'est autre que l'événement E de la première question.
- Déduire que Prob (F) = 1 - Prob (E) soit Prob (F) = $\frac{23}{28}$

  En général :
  Lorsqu'un événement est défini à l'aide de la locution " au moins" il est bien souvent plus simple de déterminer la probabilité de l'événement contraire et d'en déduire sa probabilité. Dans beaucoup de cas, comme dans cette exercice, le résultat découle d'un résultat déjà établi.

3°) a) Détermination de la loi de probabilité de X

Il s'agit de déterminer la loi de probabilité de X ; c'est à dire d'affecter à chaque valeur possible x_i de X , la probabilité de l'événement ($X = x_i$) :"X prend la valeur x_i" .

- Expliquer pourquoi les valeurs possibles de X sont 54 ; 61 ; 68 et 75.
- Montrer que la loi de probabilité de X est donnée pour le tableau suivant :

x_i	54	61	68	75
Prob($X = x_i$)	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

- Il est nécessaire d'expliquer comment a-t-on obtenu ce tableau : ainsi la probabilité de l'événement (X=54) : "les trois chemises achetées sont de marques locales" est déterminée par :

  Prob (X=54) = $\frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$ (Se rappeler que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$)

- Ne pas se contenter de laisser le résultat sous la forme Prob (X=54)= $\frac{C_5^3}{C_8^3}$

- De préférence, donner les résultats sous formes irréductibles.

b) Définition et représentation graphique de la fonction de réparation associé à X

La question comporte deux sous questions :

- La définition de la fonction F de réparation dans un cas particulier
- La représentation graphique de cette fonction de répartition

i) pour la définition de la fonction de répartition :

- Se rappeler que la fonction F de répartition de X est définie sur IR par

F(x) = Prob (X ≤ x)

- Montrer que :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,54[\\ \frac{5}{28} \text{ si } x \in [54,61[\\ \frac{5}{7} \text{ si } x \in [61,68[\\ \frac{55}{56} \text{ si } x \in [68,75[\\ 1 \text{ si } x \in [75,+\infty[\end{cases}$$

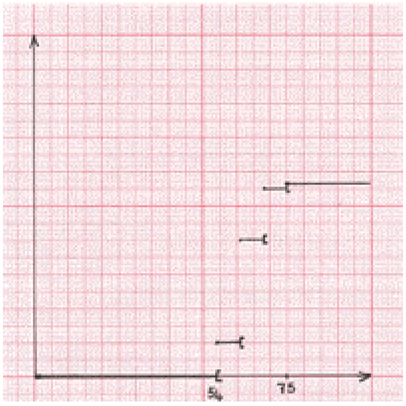
- Ne pas perdre de vue que toute fonction de répartition est en escalier (constante par intervalle), qu'elle est croissante, qu'elle est continue à gauche en tout point de ℝ, que sa limite en +∞ est 1 et que sa limite en -∞ est 0.

ii) Représentation graphique de F

Ecrire F(x) sous la forme

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;\; si\; x \in]-\infty,54[\\ \frac{10}{56} \;\; si\; x \in [54,61[\\ \frac{40}{56} \;\; si\; x \in [61,68[\\ \frac{55}{56} \;\; si\; x \in [68,75[\\ \frac{56}{56} \;\; si\; x \in [75,+\infty[\end{cases}$$

La réduction au même dénominateur vous aidera dans le choix des unités (unité=56 mm).



2°) Détermination de la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et sa variance.

L'achat d'une chemise est une épreuve aléatoire ayant deux issues contraires :

- L'achat d'une chemise de marque locale, qu'on peut considérer comme succès de probabilité p=$\frac{5}{8}$
- L'achat d'une chemise de marque étrangère de probabilité q = 1 - p = $\frac{3}{8}$
- Comme l'épreuve se répète 10 fois de façons identiques et indépendantes, alors Y suit la loi binominale de paramètres n=10 et p = $\frac{5}{8}$.

- La loi de Y est donnée par :

  Prob (Y = k) = $C_{10}^{k}\left(\frac{5}{8}\right)^{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{10-k}$ avec k$\in$ {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

  Il n'est pas nécessaire de donner la loi sous forme de tableau, en détaillant le calcul.
- Se rappeler que pour une loi binomiale de paramètres n et p, l’espérance est np et la variance est np(1-p).

On obtient E (Y) = $\frac{25}{4}$ et V (Y) = $\frac{75}{32}$.