



## Corrigé de l'exercice 1

### I) De quoi s'agit-il ?

- Résolution d'un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues réelles
- Résolution d'une équation de 3ème degré dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes
- Nombres complexes et configurations géométriques planes

### II) Indications et commentaires

#### 1°) Résolution dans $\mathbb{R}^4$ d'un système de quatre équations à quatre inconnues

- Vérifier l'équivalence :  $(f(1) = -1) \Leftrightarrow (a + b + c + d = -1)$
- Montrer que le système donné est alors équivalent au système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} a + b + c + d = -1 & (1) \\ -a + b - c + d = -15 & (2) \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 & (3) \\ -8a + 4b - 2c + d = -40 & (4) \end{cases}$$

En pensant à  $(1) + (2)$  et  $(3) + (4)$  d'une part et à  $(1) - (2)$  et  $(3) - (4)$  d'autre part, montrer alors que le système (S) est équivalent à :

$$\left( \begin{cases} b + d = -8 \\ 4b + d = -20 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a + c = 7 \\ 4a + c = 10 \end{cases} \right)$$

Il s'agit de transformer le système (S) de quatre équations à quatre inconnues en deux équations à deux inconnues faciles à résoudre.

Achever la résolution :

On obtient :

$$a = 1 ; b = -4 ; c = 6 \text{ et } d = -4$$

Ainsi la fonction  $f$  qui vérifie les conditions données est définie par  $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

Rappelons qu'un système peut être résolu de plusieurs façons, entre autres :

- Par substitution.
- Par combinaison linéaire.
- Par la méthode de pivot de Gauss.

Pour la résolution du système (S), nous avons choisi la méthode de combinaison linéaire, c'est la simplicité des calculs à effectuer qui a guidé notre choix.

En général :

Il n'y a pas de méthode privilégiée de résolution, c'est toujours la simplicité des calculs à effectuer qui guide le choix de la méthode appropriée.

#### 2°) a) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $Z^3 - 4Z^2 + 6Z - 4 = 0$

- Commençons par remarquer le lien de cette question avec la première, en effet l'équation (E) est équivalente à  $f(Z) = 0$

Il s'agit de résoudre une équation du 3<sup>ème</sup> degré dans  $\mathbb{C}$  et l'on sait que : Toute équation du 3<sup>ème</sup> degré admet dans  $\mathbb{C}$  trois solutions (distinctes ou non).

Comment trouver ces solutions ?

On cherche en général, une solution particulière  $z_0$  (généralement 1, -1, i, -i, ...), on factorise alors par  $z - z_0$  et le problème revient à la résolution d'une équation du second degré, dont la technique de résolution est connue.

Le plus souvent, une indication dans les énoncés permettra de déterminer la solution particulière, en l'occurrence  $f(2)=0$  est donnée dans la première question, elle nous signale que 2 est une solution particulière de l'équation (E).

- Exploitation de l'indication  $f(2)=0$  pour la factorisation de  $f(z)$  par  $(z - 2)$  :

### 1<sup>ère</sup> méthode : méthode d'identification

- Déterminer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $f(z) = (z - 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$   
On obtient :  $z^3 + 4z^2 + 6z - 4 = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)$   
On peut procéder autrement pour factoriser  $f(z)$  par  $(z - 2)$

### 2<sup>ème</sup> méthode : Par soustraction

On a  $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

$$f(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 6 \times 2 - 4 = 0$$

$$\text{Donc; } f(z) = f(z) - f(2) = (z^3 - 2^3) - 4(z^2 - 2^2) + 6(z - 2)$$

$$\text{c. a. d } f(z) = (z - 2)(z^2 + 2z + 4) - 4(z - 2)(z + 2) + 6(z - 2)$$

$$\text{ou encore } f(z) = (z - 2)[z^2 + 2z + 4 - 4(z + 2) + 6]$$

$$f(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)$$

- Montrer qu'on a l'équivalence :  $(z^2 - 2z + 2 = 0) \Leftrightarrow (z = 1 + i \text{ ou } z = 1 - i)$
- Conclure que l'ensemble  $S_{\mathbb{C}}$  des solutions de l'équation (E) est  $S_{\mathbb{C}} = \{ 2 ; 1 + i, 1 - i \}$

### Remarques :

1°) Pour vérifier l'exactitude de calculs dans la résolution de l'équation  $z^2 - 2z + 2 = 0$  ; on peut se rappeler que la somme  $S$  et le produit  $P$  des racines de l'équation du second degré ( $az^2 + bz + c = 0$ ) sont donnés par :

$$S = -\frac{b}{a} \text{ et } P = \frac{c}{a}.$$

$$\text{Dans notre cas on a } (1 + i) + (1 - i) = 2 = -\frac{b}{a} \text{ et } (1 + i)(1 - i) = 2 = \frac{c}{a}.$$

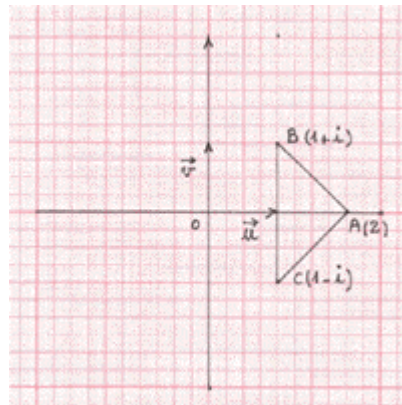
2°) Encore un moyen de vérification : Se rappeler que si  $z$  est une solution d'une équation dans  $\mathbb{C}$ , à coefficients réels, alors  $\bar{z}$  est aussi solution de cette équation. Dans notre cas les deux solutions  $1 + i$  et  $1 - i$  sont bien conjugués. Si on a trouvé deux solutions non conjuguées, c'est qu'on s'est trompé.

### b) Montrons que le triangle ABC est rectangle isocèle

Désignons par A, B et C les points d'affixes respectifs 2 ;  $1 + i$  et  $1 - i$

- Se rappeler que tout point M d'affixe  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont réels, a pour coordonnées  $(x, y)$  dans le repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ .

- La figure nous permet de constater que ABC est un triangle rectangle isocèle en A. comment démontrer ce résultat ?



**1<sup>ère</sup> méthode : utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore .**

Comment calculer la distance entre deux points M et N du plan, d'affixes  $z_M$  et  $z_N$ ?

Réponse :  $MN = |z_M - z_N|$

- Calculer alors AB, AC et BC.
- Vérifier que  $AB=AC$  et  $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- Conclure que ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

**2<sup>ème</sup> méthode : utilisation d'une " vieille expression " !**

Comment reconnaître l'orthogonalité de deux vecteurs dans un repère orthonormé ?

Réponse : soient  $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs dans un repère orthonormé.

si  $xx' + yy' = 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

- Montrer que  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont orthogonaux (N'oubliez pas que l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$ , par exemple, est  $z_B - z_A$ )
- Montrer que  $AB=AC$  (voire 1<sup>er</sup> méthode !)
- Conclure