Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Probabilités usuelles et probabilités conditionnelles.
Variable aléatoire - loi de probabilité - Espérance mathématique.
Loi binomiale.

II) Indications et commentaires

1) Calcul de la probabilité de chacun des évènements A, B, C et D

- Commencer par définir l'univers dans lequel vous allez travailler.
- Repérer dans les énoncés la locution «indiscernables au toucher» qui signifie l'équiprobabilité, et n'hésiter pas à le mentionner sur la copie.
- Souligner que le tirage est simultané (calcul de C_n^p).

i) Calcul de la probabilité des évènements A et B

- Remarquer que pour les événements A et B, on ne s'intéresse qu'aux couleurs. (oublier alors momentanément les numéros portés par les jetons !)
- Expliquer alors pourquoi on a : $\text{prob(A)}=\dfrac{C_5^1 \text{ x } C_4^1}{C_9^2}$ et $\text{prob(B)}=\dfrac{C_5^2}{C_9^2}$
- Ne pas laisser les résultats sous cette forme, mais achever les calculs ; on obtient : $\text{prob(A)}=\dfrac{5}{9}$ et $\text{prob(B)}=\dfrac{5}{18}$

  (Se rappeler que $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$).

ii) Calcul de la probabilité de l'événement C

Soit C_1 : «les jetons tirés sont rouges et portent le n°1»
C_2 : «les jetons tirés sont rouges et portent le n°3»

- Voir que $C = C_1 \cup C_2$ et $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ (C_1 et C_2 sont incompatibles)
- Justifier l'égalité $\text{prob}(C_1 \cup C_2) = \text{prob}(C_1) + \text{prob}(C_2)$
- Pourquoi a-t-on $\text{prob(C)}=\dfrac{C_3^2 + C_2^2}{C_9^2}$? on trouve : $\text{prob(C)}= \dfrac{1}{9}$

iii) Calcul de la probabilité de l'événement D

- Commencer par comprendre la distinction entre les évènements C et D.

Première méthode de calcul :

Expliquer pourquoi a-t-on $\text{prob(D)}=\dfrac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2}$? on trouve : $\text{prob(D)}= \dfrac{2}{5}$

Cela revient à calculer la probabilité sur un univers restreint à l'événement B (au lieu de l'univers Ω).

Deuxième méthode de calcul :

Si on désigne par E l'événement : «les jetons tirés portent le même chiffre» alors $\text{prob}(D)=\text{prob}(E/B)= \dfrac{\text{prob}(E\cap B)}{\text{prob}(B)}$

C'est une probabilité conditionnelle de E par rapport à B (ou aussi probabilité de E sachant B).

- Quel est l'événement $E\cap B$?
- Conclure que : $\text{prob}(D)=\dfrac{\text{prob}(C)}{\text{prob}(B)}$ et déduire le résultat : $\text{prob}(D)=\dfrac{2}{5}$.

Remarque : A la fin de tout calcul, vérifier que les probabilités trouvées sont bien comprises entre 0 et 1.

2) a) Détermination de la loi de probabilité de X

- Déterminer la loi de probabilité de X, c'est chercher les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ prises par X, et calculer $\text{prob}(X = x_i)$ pour tout i ; $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$
- Expliquer pourquoi a-t-on $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ($X(\Omega)$ étant l'ensemble des valeurs prises par X).
- Expliquer chacun des évènements $(X = i)$; $i \in X(\Omega)$, par exemple $(X = 2)$ étant l'évènement : « les jetons tirés portent le n°1 »
- Déterminer la probabilité de chacun des évènements $(X = i)$; $i \in X(\Omega)$, par exemple $\text{prob}(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_9^2}= \dfrac{1}{12}$.
- Déduire que la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6
$\text{Prob}(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$

- Vérifier que $\sum_i \text{prob}(X=x_i)=1$

b) Calcul de l'espérance mathématique de X

L'espérance mathématique de X est le réel :

$E(X)=\sum_i x_i\text{prob}(X= x_i)$. on trouve dans notre cas $E(X)=\dfrac{34}{9}$.

A noter que le réel E(X) est une moyenne (pondérée) des valeurs prises par X. Il est donc toujours compris entre les valeurs extrêmes prises par X. (un moyen de vérification !).

Dans notre cas on a bien : $2 < E(X) < 6$.

3) Détermination de la loi de probabilité de Y

A la lecture des énoncés de cette question, apparaît un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{5}{9}$.

On rappelle qu'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p consiste à répéter n fois (4 dans notre cas), de façon indépendante (remise à chaque fois des jetons tirés dans l'urne), une épreuve élémentaire (tirage simultanée de deux jetons de l'urne) dont la probabilité de réussite (les deux jetons tirés sont de couleurs différentes) est p (dans notre cas $p = prob(A) = \frac{5}{9}$) et la probabilité d'échec est $q = 1 - p$ (dans notre cas $q = \frac{4}{9}$).

La probabilité d'obtenir exactement k réussites dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est $C_n^k p^k q^{n-k}$.

(on dit que l'on obtient une distribution binomiale de paramètres n et p).

- Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{5}{9}$

  La loi de Y est donnée par la formule :

  $prob(Y=k)=C_4^k(\frac{5}{9})^k(\frac{4}{9})^{4-k}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Elle est résumée dans le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4
$Prob(Y=y_i)$	$\frac{256}{6561}$	$\frac{1280}{6561}$	$\frac{2400}{6561}$	$\frac{2000}{6561}$	$\frac{625}{6561}$

On vérifie, que la somme de toutes les $prob(Y = y_i)$ vaut bien 1; ne pas hésiter à en faire la remarque sur la copie.