

Session PRINCIPALE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Exercice n°1

A-CONTENU

Limites-Equations différentielles-Probabilité

B-REPONSES

1) Réponse - c -

2) Réponse - b -

3) Réponse - a -

Exercice n°2

A-CONTENU

-fonction logarithme népérien-Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone-

Exploitation d'un graphique-Traçage d'une courbe à partir d'une autre- Calcul intégral-Calcul d'aire

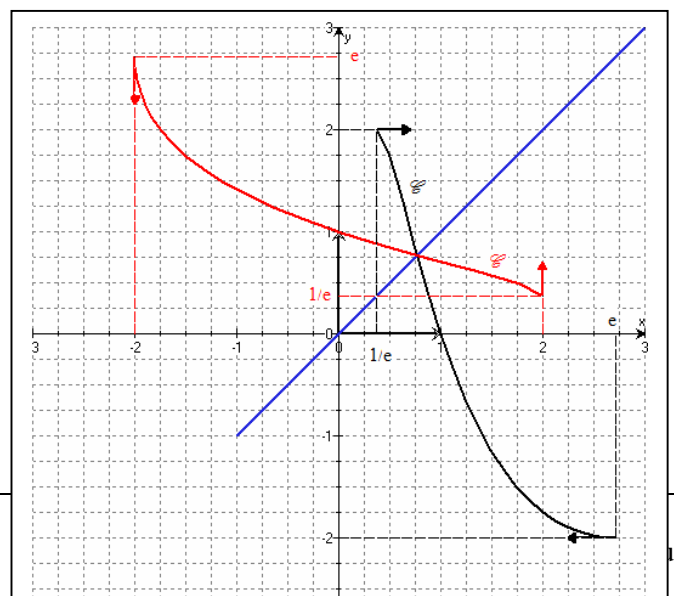
B-SOLUTION

1) a- D'après la courbe la fonction f est continue
strictement décroissante sur $[e^{-1}, e]$ donc réalise
une bijection de $[e^{-1}, e]$ sur $f([e^{-1}, e]) = [-2, 2]$.

b- Voir courbe ci-jointe.

2) a- $a_1 = \int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$.

b- $a_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, dx$. On intègre par parties,



on pose :
$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \rightarrow u'(x) = \frac{n+1}{x} (\ln x)^n \\ v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x \end{cases}$$

Donc : $a_{n+1} = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx$

Ainsi : $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$.

c- Comme $a_2 = e - 2a_1 = e - 2$ donc $a_3 = e - 3a_2 = e - 3e + 6$ ainsi $a_3 = 6 - 2e$.

3) a- $\int_1^e f(x).dx = \int_1^e ((\ln x)^3 - 3\ln x) dx = \int_1^e (\ln x)^3 dx - 3 \int_1^e \ln x dx = a_3 - 3a_1$ donc

$$\int_1^e f(x).dx = 6 - 2e - 3 = 3 - 2e.$$

b- l'aire demandée est égale à la différence entre l'aire du rectangle de dimensions e et 2 et le réel $(\int_1^e -f(x) dx)$

Ainsi $A = 2 \times e + \int_1^e f(x) dx = 2e + (3 - 2e) = 3 \text{ ua}$

Exercice n°3

A-CONTENU

Congruence –Divisibilité–Résolution ,dans $Z \times Z$,d'une équation du type $ax+by=c$

B-SOLUTION

1) $(-1, -1)$ est une solution particulière de (E) : $3x - 8y = 5$.

Donc $3(x+1) = 8(y+1)$ or : $\begin{cases} 3 \wedge 8 = 1 \\ 8/3(x+1) \end{cases}$ donc d'après le lemme de Gauss $8/(x+1)$ par suite

Il existe un entier k tel que $x = 8k - 1$ ($k \in \mathcal{Z}$). Remplaçons x par sa valeur on obtient

$$8(y+1) = 3 \times 8k \quad (k \in \mathcal{Z}) \text{ par suite } y = 3k - 1 \quad (k \in \mathcal{Z}).$$

Pour la réciproque, il suffit de vérifier que tout entier k le couple $(8k - 1, 3k - 1)$ est solution de l'équation (E) . D'où

$$S_{\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}} = \{(8k - 1, 3k - 1) ; k \in \mathcal{Z}\}.$$

2) a- On a : $\begin{cases} 3x = n - 2 \\ 8y = n - 7 \end{cases}$ donc $3x - 8y = (n - 2) - (n - 7) = 5$ d'où (x, y) est solution de (E)

b- si n est solution (S) alors $\begin{cases} n = 3x + 2 & (x \in \mathcal{Z}) \\ n = 8y + 7 & (y \in \mathcal{Z}) \end{cases}$ donc (x, y) est solution de (E) d'où

$$\begin{cases} x = 8k - 1 \\ y = 3k - 1 \end{cases} \quad (k \in \mathcal{Z}) \text{ et par suite } n = 3(8k - 1) + 2 = 24k - 1 \text{ ainsi } n \equiv -1 \pmod{24} \text{ donc}$$

$$n \equiv 23 \pmod{24}.$$

Réciproquement ,soit n un entier vérifiant $n \equiv 23 \pmod{24}$ donc $n = 24K + 23$ ($K \in \mathcal{Z}$) d'où

$$\begin{cases} n = 3(8K + 7) + 2 \\ n = 8(3K + 2) + 7 \end{cases} \quad (K \in \mathcal{Z}) \quad \text{ainsi} \quad \begin{cases} n = 3k + 2 \quad (k \in \mathcal{Z}) \\ n = 8k' + 7 \quad (k' \in \mathcal{Z}) \end{cases} \quad \text{par suite } n \text{ est solution de } (S) \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

3) a- $\begin{cases} 2^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ 7^2 \equiv 1 \pmod{8} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2^{2^k} \equiv 1 \pmod{3} \\ 7^{2^k} \equiv 1 \pmod{8} \end{cases} \quad (k \in \mathcal{N})$

b- $\bullet \begin{cases} 1991 = 3 \times 663 + 2 \\ 1991 = 8 \times 248 + 7 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} 1991 \equiv 2 \pmod{3} \\ 1991 \equiv 7 \pmod{8} \end{cases} \text{ par suite } 1991 \text{ est solution de } (S).$

\bullet Comme 1991 est solution de (S) donc $1991 \equiv 23 \pmod{24}$ ou encore $1991 \equiv -1 \pmod{24}$

Donc $(1991)^{2008} \equiv (-1)^{2008} \pmod{24}$ d'où $(1991)^{2008} \equiv 1 \pmod{24}$ on en déduit alors que

$(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice n°4

A-CONTENU

Similitude directe-Similitude indirecte-
Composée de similitudes –Symétrie axiale

B-SOLUTION

1) \bullet Le rapport de f est : $\frac{DC}{AO} = \frac{2OB}{OB} = 2$

\bullet L'angle de f est $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{DC} \right) \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$

2) a- $(IC) \perp (AD)$ car (IO) est la médiatrice de $[AB]$ donc dans le triangle ACD , la droite (IC) porte la hauteur issue de C .

$(AO) \perp (CD)$ donc dans le triangle ACD , la droite (AO) porte la hauteur issue de A .

donc $(IC) \cap (AO) = \{O\}$ est l'orthocentre du triangle ACD .

b- $\bullet f((OJ))$ est la perpendiculaire à (OJ) passant par $f(O) = C$ qui n'est autre que la droite (AC) .

$\bullet f((AJ))$ est la perpendiculaire à (AJ) passant par $f(A) = D$ qui n'est autre que la droite (DJ) .

\bullet On a $f((OJ)) \cap f((AJ)) = (AC) \cap (DJ) = \{J\}$, comme $\{J\} = (OJ) \cap (AJ)$ alors

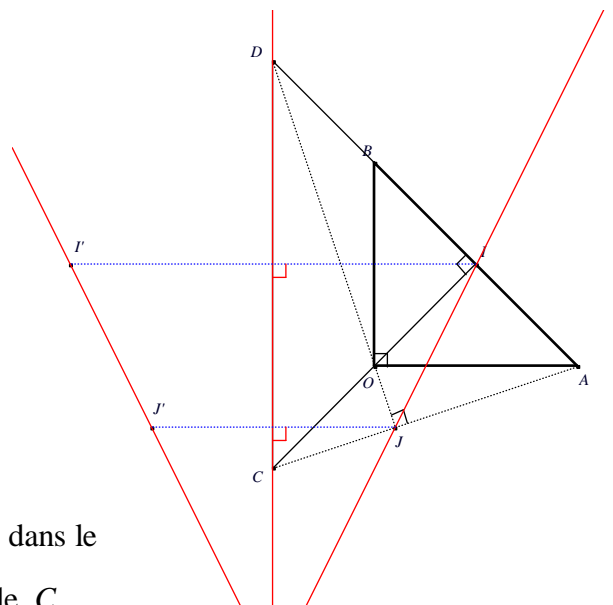
$\{f(J)\} = f((OJ)) \cap f((AJ)) = \{J\}$ donc J est invariant par f , qui est de rapport $\neq 1$ d'où J est l'unique point fixe par f et par suite J est le centre de f .

3) a- $\bullet \frac{ID}{IA} = \frac{2IB}{IB} = 2$ donc g est de rapport 2.

\bullet L'axe de g porte la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID} \right)$ qui n'est autre que (IC) .

\bullet Comme la forme réduite de g est $g = h_{(I,2)} \circ S_{(IC)} = S_{(IC)} \circ h_{(I,2)}$ donc

$$g(O) = h_{(I,2)} \circ S_{(IC)}(O) = h_{(I,2)}(O) = C \quad \text{car} \quad \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IO}.$$



- b- • $g \circ f^{-1}(C) = g(O) = C$ par suite $g \circ f^{-1}(C) = C$.
- $g \circ f^{-1}(D) = g(A) = D$ par suite $g \circ f^{-1}(D) = D$.
- $g \circ f^{-1}$ est la composée d'une similitude indirecte g de rapport 2 et d'une similitude directe f^{-1} de rapport $\frac{1}{2}$ donc $g \circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$ donc c'est un antidéplacement. Comme $g \circ f^{-1}$ fixe les points C et D on a alors $g \circ f^{-1} = S_{(CD)}$.

4) a- • $g \circ f^{-1}(J) = g(J) = J'$ par suite $g \circ f^{-1}(J) = J'$.

• $g \circ f^{-1}(I') = g(I) = I$ par suite $g \circ f^{-1}(I') = I$.

b- Comme $g \circ f^{-1}(J) = J'$ et $g \circ f^{-1}(I') = I$ donc $S_{(CD)}(J) = J'$ et $S_{(CD)}(I) = I'$ d'où

$$S_{(CD)}((IJ)) = (I'J')$$

Montrons que les droites (IJ) et (CD) sont sécantes.

Supposons qu'elles sont parallèles. On a : $S_{(CD)}(J) = J'$ donc $(CD) \perp (JJ')$ ce qui donne $(JI) \perp (JJ')$

D'autre part, $f(I) = I'$ donc $(JI) \perp (JI')$ car f est de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $(JI') \perp (JJ')$

par suite les points J, J' et I' sont alignés ce qui est absurde.

les droites (IJ) et (CD) sont sécantes et $S_{(CD)}((IJ)) = (I'J')$ Donc les droites $(IJ), (I'J')$ et (CD) sont concourantes

Exercice n°5

A-CONTENU

Produit vectoriel - Homothétie - Image d'un plan par une homothétie - Plans parallèles - Image d'un tétraèdre par une homothétie - Calcul de volumes.

B-SOLUTION

1) a- Comme $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AE} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi $\begin{cases} x_E = -1 + 1 = 0 \\ y_E = 2 + 0 = 2 \\ z_E = 1 + 2 = 3 \end{cases}$ d'où $E(0, 2, 3)$

b- $V_{ABCE} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AE}| = \frac{1}{6} |\vec{AE} \cdot \vec{AE}| = \frac{1}{6} AE^2 = 1$ uv.

2) a- $\vec{AE} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à \vec{AB} et à \vec{AC} donc il est normal au plan (ABC) et

$\vec{N}_P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et colinéaire à \vec{AE} donc P est parallèle au plan (ABC) .

b- • à partir de la relation $2\vec{KE} + \vec{KC} = \vec{0}$ on obtient $K(0, 1, 3)$

• les coordonnées du point K vérifient : $0 - 2 - 3 + 5 = 0$ donc $K \in P$.

3) a- On sait que $\vec{2KE} + \vec{KC} = \vec{0}$ donc $\vec{2KE} + \vec{KE} + \vec{EC} = \vec{0}$ d'où $\vec{EK} = \frac{1}{3}\vec{EC}$ ainsi h est de rapport $\frac{1}{3}$.

b- On sait que $V_{EJK} = \frac{1}{6} |(\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) \cdot \vec{IE}|$ or on a :

$h((ABC))$ est un plan parallèle à (ABC) passant par $h(C) = K$ donc $h((ABC)) = P$.

Par suite comme A est un point de (ABC) donc $h(A)$ est un point de P vérifiant A , $h(A)$ et E alignés. Donc $h(A) = I$.

De même comme B est un point de (ABC) donc $h(B)$ est un point de P vérifiant B , $h(B)$ et E alignés. Donc $h(B) = J$ de plus, vu que $h(C) = K$ et $h(E) = E$ on aura

$$V_{EJK} = \frac{1}{6} |(\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) \cdot \vec{IE}| = \frac{1}{6} \left| \left(\frac{1}{3} \vec{AB} \wedge \frac{1}{3} \vec{AC} \right) \cdot \frac{1}{3} \vec{AE} \right| = \frac{1}{27} \left(\frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AE}| \right) = \frac{1}{27} V_{ABCE} = \frac{1}{27}.$$

Donc le volume du tétraèdre EJK est $V_{EJK} = \frac{1}{27}$.

FIN.