Corrigé (Mathématiques)

Section : **Sciences de l'Informatique** **Session principale 2008**

Exercice 1 :

- ✓ **Contenu : Suites réelles**
- ✓ **Aptitudes visées : Etudier les variations d'une suite, étudier la convergence d'une suite, détermine la limite d'une suite convergente.**

1) b) ($u_{n+1} = -2\, u_n$)

2) a) ($u_{n+1} - u_n = \ln 3 > 0$)

3) a) ($\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et $e^0 = 1$)

Exercice 2 :

- ✓ **Contenu : Arithmétique : résolution des équations du type : ax+by=c**
- ✓ **Aptitudes visées : Connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans Z, calculer le pgcd de deux entiers, reconnaitre que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans Z^2, des équations du type : ax+by=c.**

1) $19a = 7b$

On a $19 \wedge 7 = 1$ $d'où$ $a = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$ et par suite $b = 19k$

les couples sont de la forme $(7k\,, 19k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) a) $19 \times 3 - 7 \times 8 = 57 - 56 = 1$

b)

$$\begin{cases} 19x - 7y = 1 & (1) \\ 19 \times 3 - 7 \times 8 = 1 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Leftrightarrow 19(x-3) - 7(y-8) = 0 \Leftrightarrow 19(x-3) = 7(y-8)$

d'après la question 1) on a : $\begin{cases} x - 3 = 7k \\ y - 8 = 19k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 7k \\ y = 8 + 19k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$d'où$ $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3 + 7k\,, 8 + 19k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3 :

- ✓ **Contenu : Nombres complexes**
- ✓ **Aptitudes visées : Déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.**

1) $\Delta' = (1+i)^2 - (-1+2i) = 1$; $S_{\mathbb{C}} = \{i\ ,\ 2+i\}$

2) a) $OA = |i| = 1$; $OB = |2+i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $AB = |2+i-i| = 2$.

b) $OA^2 + AB^2 = 1 + 2^2 = 5 = OB^2$, d'après le théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle OAB est rectangle en A.

c) OABC est un rectangle $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

$$\Leftrightarrow z_A = z_B - z_C \Leftrightarrow z_C = z_B - z_A \Leftrightarrow z_C = 2$$

Exercice 4 :

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter un graphique pour : donner une image, un nombre dérivé; des asymptotes; le signe d'une fonction et des solutions d'une équation, calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, calculer une aire plane.

1) a) $f(-1) = 3$; $f'(-1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$

c) $f(x) = 0$ admet deux solutions $\left(\mathcal{C}\ \ et\ \ (O,\vec{i}\,) \text{se}\ \ coupent\ \text{en deux}\ points\right)$

2) a) $f(-1) = 2 + m + \underbrace{p\ln(1)}_{0} = 3 \Leftrightarrow 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$

b) $f'(x) = -2 + \dfrac{p}{x+2}$

c) $f'(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 + p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 2 \quad d'où \quad f(x) = -2x + 1 + 2\ln(x+2)$

d)
$f(x) - (-2x+1) = 2\ln(x+2)$; $x \in \left]-2,+\infty\right[$; $\ln(x+2) < 0 \Leftrightarrow x + 2 < 1 \Leftrightarrow x < -1$

x	-2 -1	-1 $+\infty$
$f(x)$-y	$-$	$+$
Position de $\mathscr{C}$ % D	D/$\mathscr{C}$	$\mathscr{C}$/D

3) a) on pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x+2} \end{cases}$

$$\int_{-1}^{1} \ln(x+2)dx = \left[(x+2)\ln(x+2)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} dx = 3\ln 3 - 2$$

b) $A = 6\ln 3 - 4 \ (u.a)$

Exercice 5 :

- ✓ **Contenu : Plans de l'espace, opérations sur les matrices, déterminant d'une matrice, inverse d'une matrice, résolution d'un système linéaire.**
- ✓ **Aptitudes visées : Déterminer une équation cartésienne d'un plan, résoudre un système linéaire (3x3) en utilisant l'inverse d'une matrice, déterminer l'intersection de trois plans.**

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} \neq 0$ *alors* A, B *et* C *ne sont* pas *alignés*.

b) $0-0-2+2=0 \Leftrightarrow A \in (ABC)$; $0-2+0+2=0 \Leftrightarrow B \in (ABC)$;

$1-2-1+2=0 \Leftrightarrow C \in (ABC)$ *d'où* $(ABC): x-2y+z+2=0$

2) a) $det(M)=\begin{vmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{vmatrix}=1+4-6=-1\neq 0$ *donc* M est *inversible*

b) On vérifie que $M\times\begin{pmatrix}-3 & 5 & 6\\-1 & 2 & 2\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{I}_3$

3) a) $\begin{cases}y+2z=5\\-x+3y=2\\x-2y+z=-2\end{cases} \Leftrightarrow M\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M^{-1}\times\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\-5\\5\end{pmatrix}$

$S_{\mathbb{R}^3}=\{(-17\,,-5\,,5)\}$

b) D'après a), on en déduit que les plans (ABC), P *et* Q **sont sécants au point** $E(-17\,,-5\,,\,5)$