REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session de contrôle***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Mathématiques***
	Durée : **4h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte sept pages numérotées de 1/7 à 7/7.
Les pages 5/7, 6/7 et 7/7 sont à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> (5 points)

Le plan est orienté. Dans la **Figure 1** de **l'annexe** jointe,

- ABC est un triangle équilatéral direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
- $\mathscr{C}_1$ est le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre ;
- I est le milieu du segment $[BC]$;
- $AICD$ est un rectangle direct.

1) Soit f le déplacement tel que $f(A) = C$ et $f(B) = A$.

Montrer que f est une rotation dont on précisera son centre et une mesure de son angle.

2) Soit g l'antidéplacement tel que $g(A) = C$ et $g(B) = A$.

a) Justifier que g est une symétrie glissante.

b) Montrer que $g = t_{\overrightarrow{BI}} \circ S_{\Delta}$, où Δ est la médiatrice du segment $[AI]$.

3) Soit h l'homothétie de centre A et telle que $h(O) = I$. On pose $\varphi = g \circ h \circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{3}{2}$.

b) Montrer que $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O) = D$.

4) Soit $E = \varphi(C)$.

a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D.

b) Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

c) Construire alors le point E.

d) Soit Ω le centre de φ.

Montrer que $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$. Construire le point Ω.

5) On pose $\mathscr{C}_2 = \varphi(\mathscr{C}_1)$.

Le cercle $\mathscr{C}_2$ coupe le cercle $\mathscr{C}_1$ au point C et en un autre point M. On pose $N = \varphi(M)$.

Montrer que les points Ω, B et M sont alignés. Construire alors le point N.

<u>Exercice 2</u> (3 points)

Une urne contient six pièces de monnaie :

- quatre pièces sont équilibrées ;
- les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir « FACE » est égale à $\frac{2}{3}$.

On tire, au hasard, une pièce de l'urne et on effectue n lancers successifs de cette pièce, $n \geq 1$.
On considère les événements suivants :

- E : « la pièce tirée est équilibrée ».
- F_n : « on obtient FACE pour les n lancers».

1) a) Déterminer $p(E)$, $p(F_1/E)$ et $p(F_1/\bar{E})$.

b) Montrer que $p(F_1)=\frac{5}{9}$.

2) Montrer que $p(F_n)=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$.

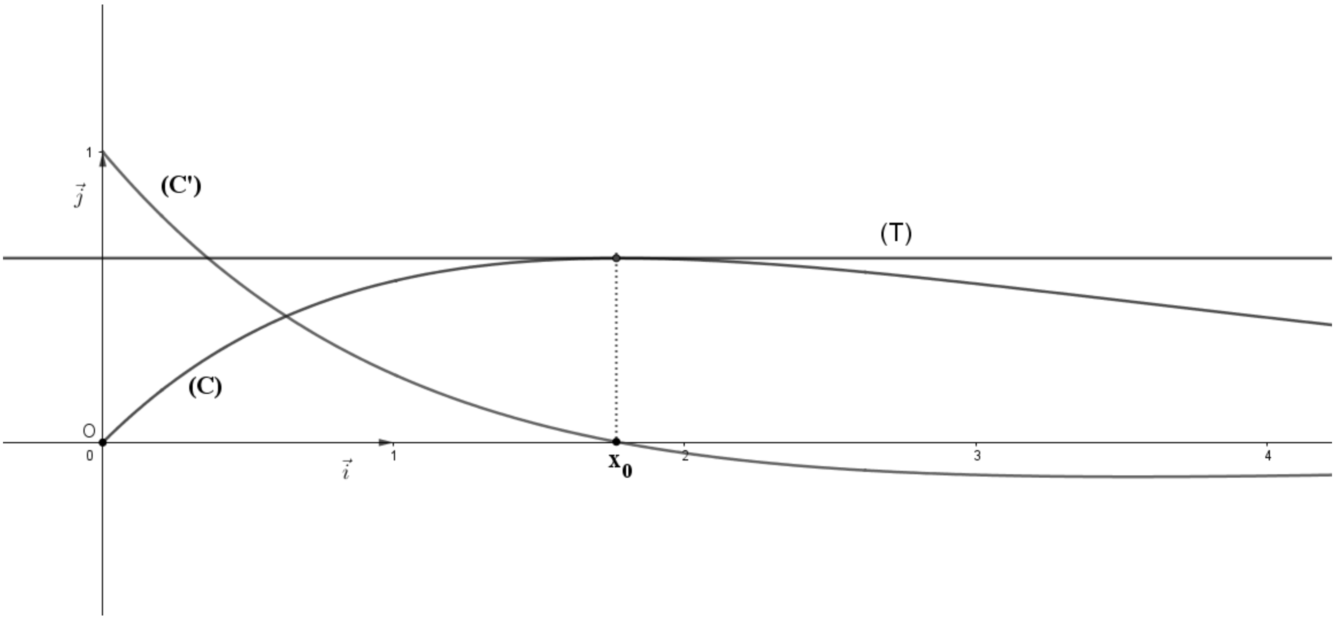
3) Soit X_n la variable aléatoire définie de la manière suivante : $\begin{cases} X_n = n & \text{si } F_n \text{ est réalisé ;} \\ X_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Donner la loi de probabilité de X_n.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X_n.

c) Dans la figure ci-dessous,

- $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan,
- (C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right)$,
- (C') est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f,
- la courbe (C') coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en un seul point d'abscisse x_0,
- (T) est la droite d'équation $y=f(x_0)$.



Exploiter le graphique pour déterminer l'entier naturel n pour lequel l'espérance mathématique $E(X_n)$ est maximale.

<u>Exercice 3</u> (7 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $1+x\ln x\geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+x\ln x} & \text{si } x>0, \\ f(0)=1. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3) a) Montrer pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{1+\ln x}{(1+x\ln x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la **figure 2** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ respectivement par $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x}$.

a) Construire le point A de (C_1) d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ et le point B de (C_2) d'abscisse $1-\dfrac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de (C_f) d'abscisse $\dfrac{1}{e}$.

b) Déduire de la question 1) b) que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f(x)\leq\dfrac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de (C_f) et (C_2).

c) Tracer la courbe (C_f).

5) On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t+t\ln(t)}\leq f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\ln(1+\ln x)\leq F(x)\leq\ln x$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

6) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction $h: x\mapsto x-F(x)$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x)=n$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$.

d) Vérifier que $\dfrac{\alpha_n}{n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$.

<u>Exercice 4</u> (5 points)

1) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 - (1+i)z - i = 0$.

Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2, les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 1, i, z_1 et z_2.

Soit z un nombre complexe distinct de 1, i, z_1 et z_2.

On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z' = \dfrac{z+i}{z-i}$.

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend $z = i + 2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que $z' = 1 + ie^{-i\theta}$.

c) Montrer que $AM' = 1$ et que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \theta \ [2\pi]$.

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ.

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$.

a) Vérifier que $z_P = \dfrac{1+i + 2e^{i\theta} + ie^{-i\theta}}{2}$.

b) En déduire que $z_Q = \dfrac{i\sqrt{2} + 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$.

c) Montrer alors que $z_Q = \dfrac{1}{2}\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) + i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3}{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ, le point Q varie sur l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation

$$4x^2 + \frac{4}{9}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

b) Dans la **figure 3** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le cercle Γ, l'ellipse $\mathcal{E}$, et on a placé un point M sur le cercle Γ tel que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$. Construire les points M' et Q.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve **: Mathématiques -** Section **: Mathématiques - Session de contrôle - 2018**

Annexe à rendre avec la copie

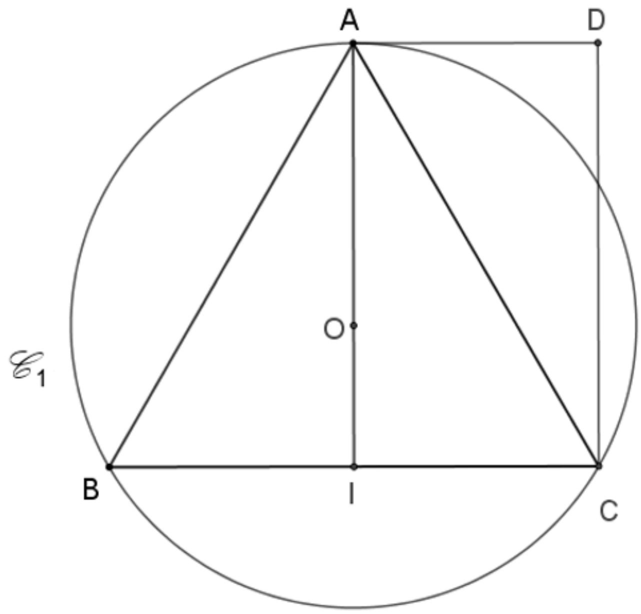


Figure 1

Ne rien écrire ici

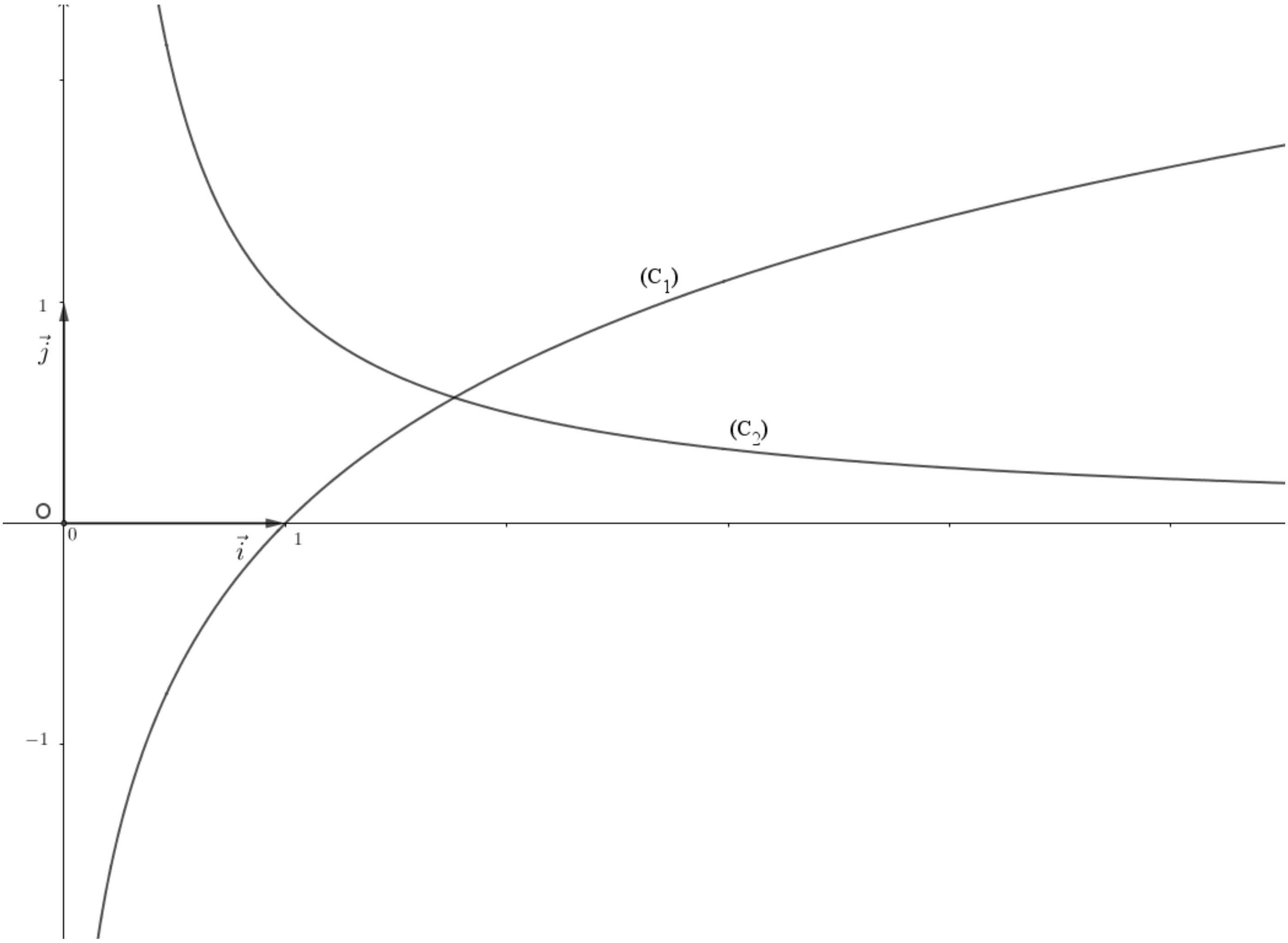


Figure 2

Ne rien écrire ici

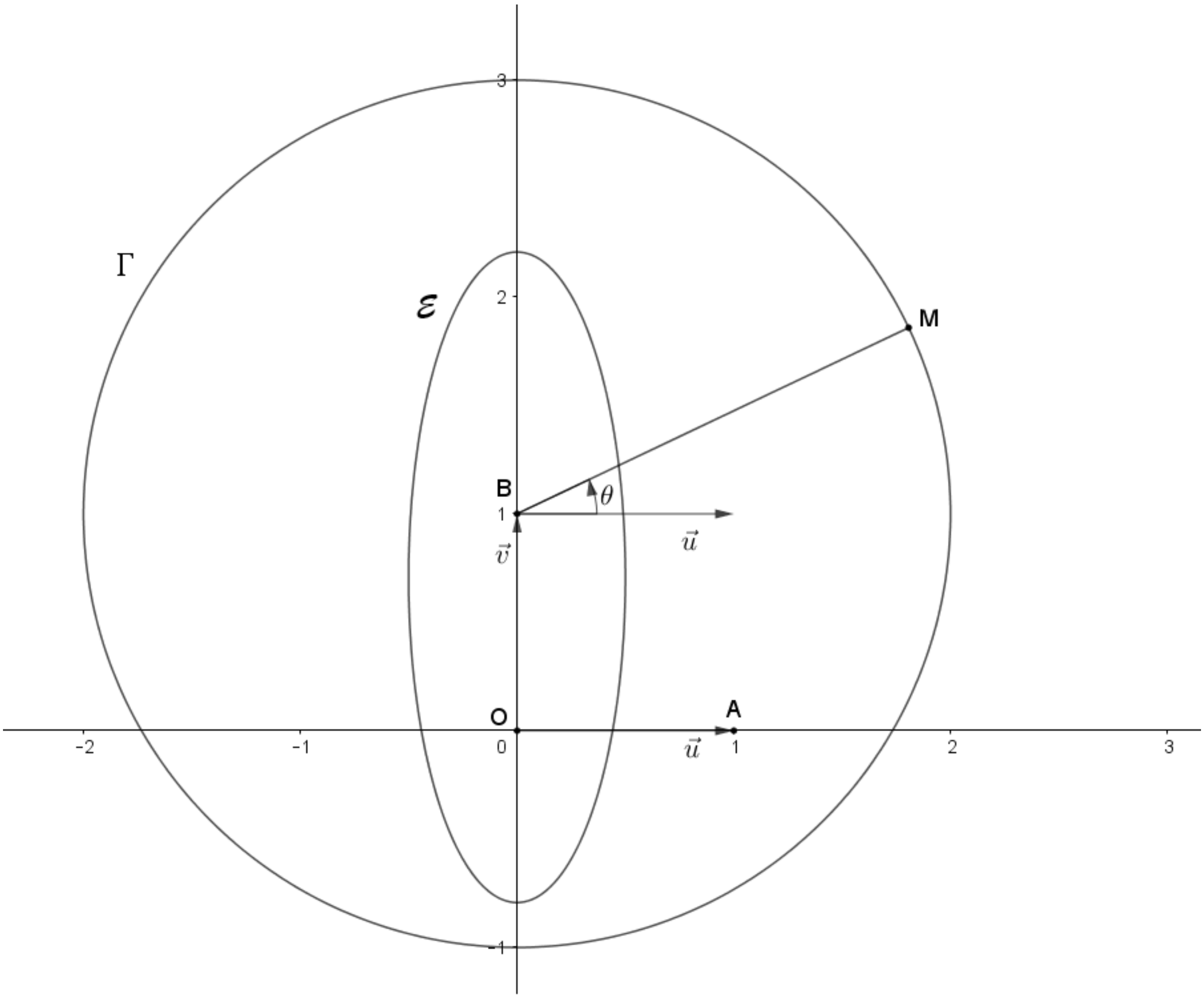


Figure 3