

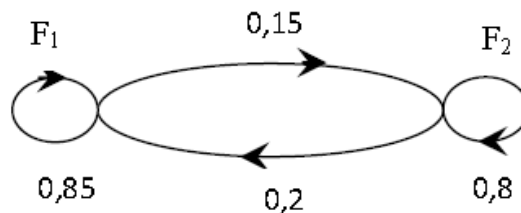
Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

	I)		II)	
Question	1)	2)	1)	2)
Réponse	a	c	b	a

Exercice 2



1)a) La probabilité est passée auprès du fournisseur \$F_1\$. La probabilité qu'elle le soit encore la semaine suivante est $p(F_1 / F_1) = 0,85$.

b) La matrice de transition du graphe $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

2) Pour tout entier naturel non nul \$n\$, on désigne par :

- \$a_n\$ la probabilité de l'évènement : « la semaine \$n\$ la commande est auprès du fournisseur \$F_1\$ ».
- \$b_n\$ la probabilité de l'évènement : « la semaine \$n\$ la commande est auprès du fournisseur \$F_2\$ ».
- \$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}\$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste pour la semaine \$n\$.

$$P \times M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \times 0,85 + \frac{3}{7} \times 0,2 & \frac{4}{7} \times 0,15 + \frac{3}{7} \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = P.$$

\$P \times M = P\$, d'où la matrice \$P\$ traduit l'état stable de la situation.

$$3) P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}; \quad M^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 + 3(0,65)^n & 3 - 3(0,65)^n \\ 4 - 4(0,65)^n & 3 + 4(0,65)^n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} a) 7P_1 M^{n-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 + 3(0,65)^{n-1} & 3 - 3(0,65)^{n-1} \\ 4 - 4(0,65)^{n-1} & 3 + 4(0,65)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} (4 + 3(0,65)^{n-1}) + \frac{4}{7} (4 - 4(0,65)^{n-1}) & \frac{3}{7} (3 - 3(0,65)^{n-1}) + \frac{4}{7} (3 + 4(0,65)^{n-1}) \\ 4 - (0,65)^{n-1} & 3 + 4(0,65)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - (0,65)^{n-1} & 3 + 4(0,65)^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b) P_n = a_n \quad b_n = P_1 M^{n-1} = \frac{1}{7} 4 - (0,65)^{n-1} \quad 3 + (0,65)^{n-1}$$

$$D'o\grave{u} \begin{cases} a_n = \frac{1}{7} 4 - (0,65)^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{7} 3 + (0,65)^{n-1} \end{cases}$$

$$a_n - b_n = \frac{1}{7} 4 - (0,65)^{n-1} - \frac{1}{7} 3 + (0,65)^{n-1} = \frac{1}{7} 1 - 2(0,65)^{n-1} = \frac{1 - 2(0,65)^{n-1}}{7}.$$

c) Le rang de la semaine où, pour la première fois, la probabilité que le commerçant commande auprès du fournisseur F_1 dépasse la probabilité que le commerçant commande auprès du fournisseur F_2 :

$$a_n > b_n \Leftrightarrow a_n - b_n > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2(0,65)^{n-1}}{7} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(0,65)^{n-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2(0,65)^{n-1} < 1$$

$$\Leftrightarrow (0,65)^{n-1} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \ln(0,65) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \ln(0,65) < -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \ln(0,65) < -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow n-1 > -\frac{\ln 2}{\ln(0,65)}$$

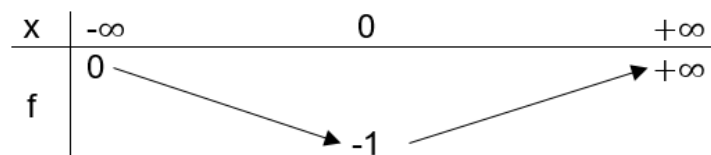
$$\Leftrightarrow n > 1 - \frac{\ln 2}{\ln(0,65)} \simeq 2,61$$

D'où le rang $n = 3$.

Exercice 3

$$1)a) f(0) = -1; f'(0) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b) Le tableau de variation de f :



2)a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $0, +\infty$, d'où g réalise une bijection de $0, +\infty$ sur $g(0, +\infty) = -1, +\infty$.

b) Voir figure.

$$3)a) g(x) = (x-1)e^x; x \in 0, +\infty.$$

$$g'(x) = (x-1)e^x ; x \in 0, +\infty$$

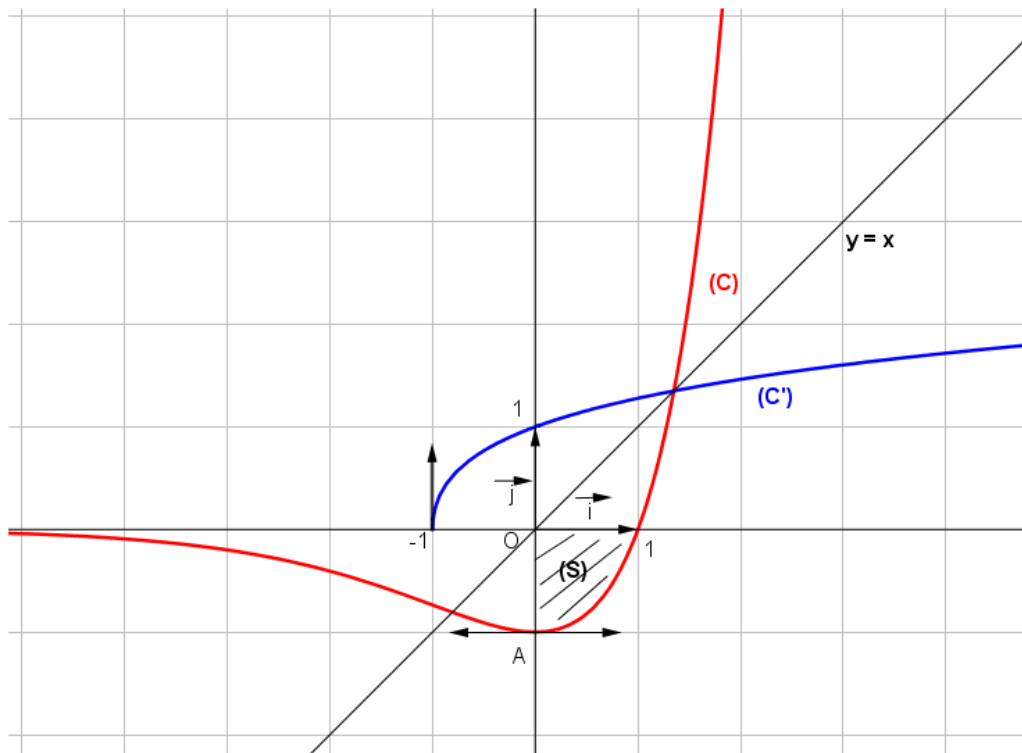
$$= e^x + (x-1)e^x = e^x + g(x)$$

D'où $g(x) = g'(x) - e^x$; pour tout $x \in 0, +\infty$.

$$b) \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 g'(x) - e^x dx = [g(x) - e^x]_0^1 = g(1) - e - g(0) - 1 = -e + 2 = 2 - e.$$

4)a) (S) la partie du plan limitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. Voir figure.

$$b) \text{aire } S = \int_0^1 -g(x) dx = -\int_0^1 g(x) dx = e - 2 \text{ u.a.}$$



Exercice 4

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$1)a) U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 5 + 2 = \frac{5}{3} + \frac{6}{3} = \frac{11}{3}.$$

$$U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{11}{3} + 2 = \frac{11}{9} + \frac{18}{9} = \frac{29}{9}$$

$$b) U_2 - U_1 = \frac{29}{9} - \frac{11}{3} = \frac{29}{9} - \frac{33}{9} = -\frac{4}{9} ; U_1 - U_0 = \frac{11}{3} - 5 = \frac{11}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{4}{3}.$$

$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$; d'où (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{11}{3}}{5} = \frac{11}{15} ; \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{29}{9}}{\frac{11}{3}} = \frac{29}{9} \times \frac{3}{11} = \frac{29}{33}$$

$\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$; d'où (U_n) n'est pas une suite géométrique.

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n > 3$.

- $U_0 = 5 > 3$, d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que l'inégalité est vraie pour n , c'est-à-dire $U_n > 3$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n + 1$.

$$U_n > 3 \Rightarrow \frac{1}{3}U_n > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}U_n + 2 > 3$$

$$\Rightarrow U_{n+1} > 3 ; \text{ d'où l'inégalité est vraie pour } n + 1.$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence, $U_n > 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) $V_n = \ln U_n - 3$; $n \in \mathbb{N}$

$$a) V_{n+1} = \ln U_{n+1} - 3 = \ln\left(\frac{1}{3}U_n - 1\right) \\ = \ln\left(\frac{1}{3}(U_n - 3)\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln U_n - 3 = V_n - \ln 3$$

Ainsi $V_{n+1} = V_n - \ln 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) On a : $V_{n+1} = V_n - \ln 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$V_1 = V_0 - \ln 3$$

$$V_2 = V_1 - \ln 3$$

$$\oplus \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot$$

$$V_{n-1} = V_{n-2} - \ln 3$$

$$V_n = V_{n-1} - \ln 3$$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} + V_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-2} + V_{n-1} - n \ln 3$$

$$\Leftrightarrow V_n = V_0 - n \ln 3 = \ln U_0 - 3 - n \ln 3 = \ln 2 - n \ln 3$$

c) On a : $V_n = \ln 2 - n \ln 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = \ln 2 - n \ln 3 = \ln 2 - \ln 3^n = \ln \left(\frac{2}{3^n} \right) ; \text{ d'autre part } V_n = \ln U_n - 3 \quad ; n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'où } \ln U_n - 3 = \ln \left(\frac{2}{3^n} \right) \Leftrightarrow U_n - 3 = \frac{2}{3^n}$$

$$\Leftrightarrow U_n = 3 + \frac{2}{3^n} \quad ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{3^n} \right) = 3.$$