

MATHÉMATIQUES

Section : Sciences Expérimentales
Session de contrôle : juin 2015

Exercice 1 (5 points)

1/ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$. Il en résulte que (S) est la sphère de centre $I(1, -1, 0)$ et de rayon $R = 5$.

2/ a) $\vec{JI} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{JM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$. $M \in (P) \Leftrightarrow \vec{JI} \cdot \vec{JM} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - z + 5 = 0$. Il en résulte que (P) est le plan

d'équation $2x - 2y - z + 5 = 0$.

b) $d(I, P) = \frac{|2 + 2 + 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3 < 5$ donc (S) et (P) sont sécants suivant un cercle (C) de rayon

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ et de centre le projeté orthogonal de I sur (P), or $J \in (P)$ et \vec{JI} est normal à (P), on en déduit que J est le projeté orthogonal de I sur (P), par suite J est le centre de (C).

3/ a) $\vec{AI} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{JI} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AI} = 3\vec{JI}$ par suite les vecteurs \vec{AI} et \vec{JI} sont colinéaires, d'où $A \in (IJ)$.

b) $AJ = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$.

4/ a) On sait que $\begin{cases} A \in (IJ) \\ (IJ) \perp (P) \text{ en } J \\ M \in (C) \subset (P) \end{cases}$. il en résulte que le triangle AJM est rectangle en J.

b) $AM = \sqrt{AJ^2 + JM^2} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$.

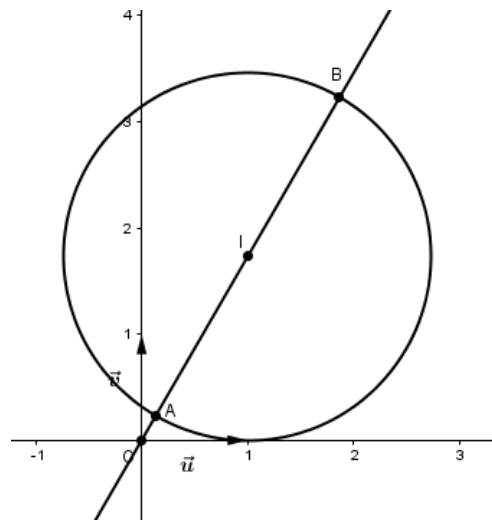
c) Pour tout M du cercle (C), $AM = 2\sqrt{13}$ donc $M \in (S')$, il en résulte que $(C) \subset (S')$ et puisque $(C) \subset (P)$, on en déduit que l'intersection de (P) et (S') est le cercle (C).

Exercice 2 (5 points)

1/ a) $\Delta = \left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 12e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

b) Soit $\delta = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$z' = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = (2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.



$$z'' = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = (2 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2/ a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) $OA = OI - IA = 2 - \sqrt{3}$.

$OB = OI + IB = 2 + \sqrt{3}$.

c) $|z_A| = OA = 2 - \sqrt{3}$ et $\arg(z_A) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OA})[2\pi] \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OI})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_A = (2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$|z_B| = OB = 2 + \sqrt{3}$ et $\arg(z_B) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OB})[2\pi] \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OI})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_B = (2 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 3 (6 points)

1/ a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. le signe est celui de $x-1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$			

b) $g(1) = 1$. La fonction g admet sur $]0, +\infty[$ un minimum global en 1 égal à 1, il en résulte que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) > 0$.

2/ a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = +\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = 2 - 2 \frac{\ln x}{x} = 2 \frac{(x - \ln x)}{x} = \frac{2g(x)}{x}.$$

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3/ a) Soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 1, alors T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x$.

Il en résulte que Δ est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

$$b) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-(\ln x)^2 \right] = +\infty \end{cases} . \text{ On en déduit que } C_f \text{ admet une direction asymptotique qui est}$$

celle de la droite Δ .

c) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) - 2x = [-(\ln x)^2] \leq 0$ donc C_f est au-dessous de la droite Δ et le point de coordonnées $(1, 2)$ est un point d'intersection.

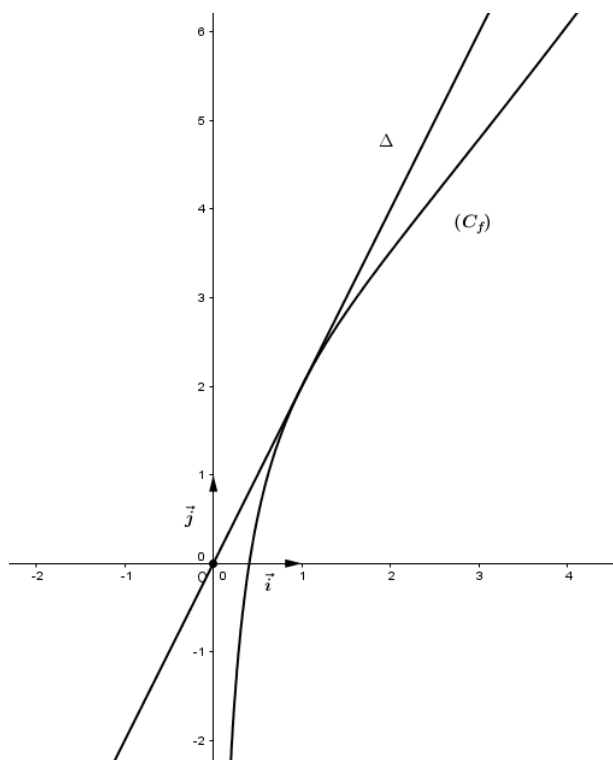
4/ a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \square$.

$0 \in \square$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

La fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$.

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right) \approx -1.4 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5 > 0 \end{cases} . \text{ Il en résulte que } \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2} .$$

b)



$$c) A = \int_1^e |f(x) - 2x| dx = \int_1^e (\ln x)^2 dx.$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$A = \left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2 [x \ln x - x]_1^e = (e - 2) u_a.$$

Exercice 4 (4 points)

1/ a) $u_1 = qu_0 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$

b) La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

c) S_n est la somme de $(n + 1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc

$$S_n = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

2/ La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = e^x - 1.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
$h(x)$		○	

$h(0) = 0.$ La fonction h admet sur $]0, +\infty[$ un minimum global en 0 égal à 0, il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0,$ on en déduit que $e^x \geq x + 1.$

3/ a) $v_0 = 1 + u_0 = \frac{4}{3}$ et $v_1 = (1 + u_0)(1 + u_1) = \frac{40}{27}.$

b) Pour tout entier naturel $n,$ $v_{n+1} - v_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n)(1 + u_{n+1}) - (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n)$
 $= (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n)(1 + u_{n+1} - 1) = (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n) u_{n+1} > 0$

car $u_n = q^n u_0 = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$ pour tout entier naturel $n.$

Ainsi la suite (v_n) est croissante.

c) D'après 2/ on a pour tout entier $k,$ $1 + u_k \leq e^{u_k}.$

Pour $k = 0,$ $0 < 1 + u_0 \leq e^{u_0}$

Pour $k = 1,$ $0 < 1 + u_1 \leq e^{u_1}$

.

.

.

Pour $k = n,$ $0 < 1 + u_n \leq e^{u_n}$

En multipliant membre à membre, on obtient $(1 + u_0)(1 + u_1)\dots(1 + u_n) \leq e^{u_0 + u_1 + \dots + u_n}$.

Il en résulte que pour tout entier naturel n , $v_n \leq e^{S_n} = e^{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

d) La suite (v_n) est croissante et pour tout entier naturel n , $v_n \leq e^{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)} \leq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ car $0 < 1 - \frac{1}{3^{n+1}} < 1$

donc elle est majorée par \sqrt{e} , il en résulte qu'elle est convergente.

e) On sait que $v_n \leq \sqrt{e}$ de plus la suite (v_n) est croissante donc $v_n \geq v_0 = \frac{4}{3} > 1$, ainsi $1 < v_n \leq \sqrt{e}$ et puisque (v_n) est convergente vers l et par passage à la limite, on obtient $1 \leq v_n \leq \sqrt{e}$.