Section: Sciences Techniques ***Session principale 2009***

Matière : Mathématiques

Exercice n°1 *(3 points)*

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes, Calcul intégral, primitives.
- ✓ **Aptitudes visées :** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe une équation du second degré, représenter géométriquement un nombre complexe, calculer une intégrale, vérifier l'expression d'une primitive d'une fonction.
- ✓ **Corrigé :**

1) b) 2) c) 3) c) 4) a)

Exercice n°2 *(6 points)*

- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, distance d'un point à un plan, positions relatives de plans et droites, section d'une sphère par un plan.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la position relative d'une droite et un plan, déterminer la section d'une sphère par un plan.
- ✓ **Corrigé**

A(1,0-1) B(1,3,5) C(-7,2,2) H(-1,4,3)

1) a- $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-6\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}5\\-10\\-10\end{pmatrix}$.

b- $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}$ est un vecteur normal au plan (HBC) d'où une équation cartésienne du plan (HBC) est de la forme : $5x - 10y - 10z + d = 0$
de plus $B(1,3,5) \in$ (HBC) donc $5 - 30 - 50 + d = 0$ par suite $d = 75$.
ainsi et après simplification par 5, (HBC) : $x - 2y - 2z + 15 = 0$.

c- on a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC} = \frac{-5}{2}\overrightarrow{AH}$ par suite $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinèaires .

Comme $H \in$ (HBC) on a, H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC) .

2) $S = \{ M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0 \}$

a- $M(x,y,z) \in S$ signifie $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$

signifie $x^2 + (y-2)^2 - 2^2 + (z-1)^2 - 1^2 + 1 = 0$

signifie $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$

donc S est la sphère de centre $I(0,2,1)$ et de rayon $R = 2$.

b- Les coordonnées du milieu de [AH] sont ($\frac{1-1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{-1+3}{2}$) , donc I est le milieu du segment [AH].

c- H est le projeté orthogonale de A sur le plan (HBC) et I est le milieu du segment $[AH]$ donc H est aussi le projeté orthogonale de I sur le plan (HBC) par suite

$$d(I , (HBC))= IH = \frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{2} = 3 > R = 2$$

Autrement :

$$d(I , (HBC))= \frac{|-4-2+15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 3 > R = 2$$

D'où $S \cap (HBC) = \varnothing$.

3) $J(0 , 0 , 1)$.

a- $IJ = \sqrt{0^2+2^2+0^2} = \sqrt{4} = 2 = R$ signifie $J \in S$.

Autrement : $0^2+(0-2)^2+(1-1)^2 = 4$ donc $J \in S$

b- $d(I , (AJ)) = \dfrac{\|\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AJ}\|}{\|\overrightarrow{AJ}\|}$ on a : $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix}$

par suite $d(I , (AJ)) = \dfrac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

c- Comme la distance du centre I de S à la droite (AJ) est égale au rayon de S , alors (AJ) est tangente à S .

d- • $(AJ) = (A,\overrightarrow{AJ})$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite (AJ) est :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R} .$$

• $M(x , y , z) \in (AJ) \cap (HBC)$ signifie $\begin{cases} \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ x-2y-2z+15 = 0 \end{cases}$

ce qui donne : $-\alpha-2(2\alpha+1)+15 = 0$ signifie $5\alpha = 13$ signifie $\alpha = \dfrac{13}{5}$ D'où $M(-\dfrac{13}{5};0;\dfrac{31}{5})$.

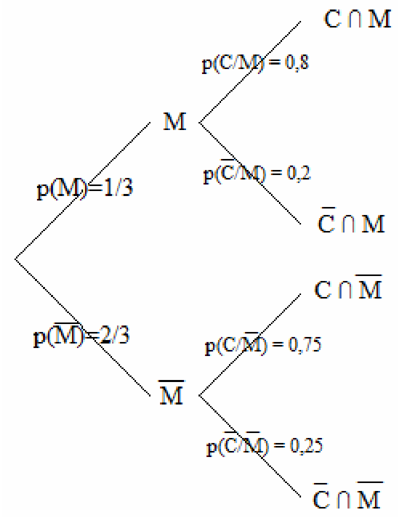
Exercice n°3 ***(5 points)***

- ✓ **Contenu :** Probabilité uniforme, probabilité conditionnelle.
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer la probabilité d'un évènement, établir un arbre de probabilité, appliquer la formule de la probabilité totale

✓ **Corrigé :**

1) a- $p(M) = \frac{1}{3}$, $p(C/M) = 0{,}8$ et $p(C/\overline{M}) = 0{,}75$.

b-



2) a- $p(C \cap M) = \frac{1}{3} \times 0{,}8 = \frac{4}{15}$

b- $p(C \cap \overline{M}) = 0{,}75 \times \frac{2}{3} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

c- $p(C) = p(C \cap M) + p(C \cap \overline{M}) = \frac{4}{15} + \frac{1}{2} = \frac{23}{30}$.

3) $p(E) = p(M/C) = \frac{p(C \cap M)}{p(C)} = \frac{4/15}{23/30} = \frac{8}{23}$.

Exercice n°4 ***(6 points)***

✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, fonction réciproque, courbe, Calcul d'aire.

✓ **Aptitudes visées :** Lire un tableau de variation, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, étudier la position relative de deux courbes, tracer une courbe, calculer une aire plane.

✓ **Corrigé :**

1) a- la restriction g de f à l'intervalle $[0,+\infty[$ est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

donc g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[) =]-\infty,2]$

b- • $f(]-\infty,0]) =]1,2]$ d'où f ne s'annule pas sur $]-\infty,0]$

● D'après a) g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[) =]-\infty,2]$

et comme $0 \in]-\infty,2]$ l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0,+\infty[$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$, une solution unique α .

c- $g(1) = 1 > 0$ et $g(1,5) = 1 - (0,5)e^{1,5} < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $1 < \alpha < 1,5$.

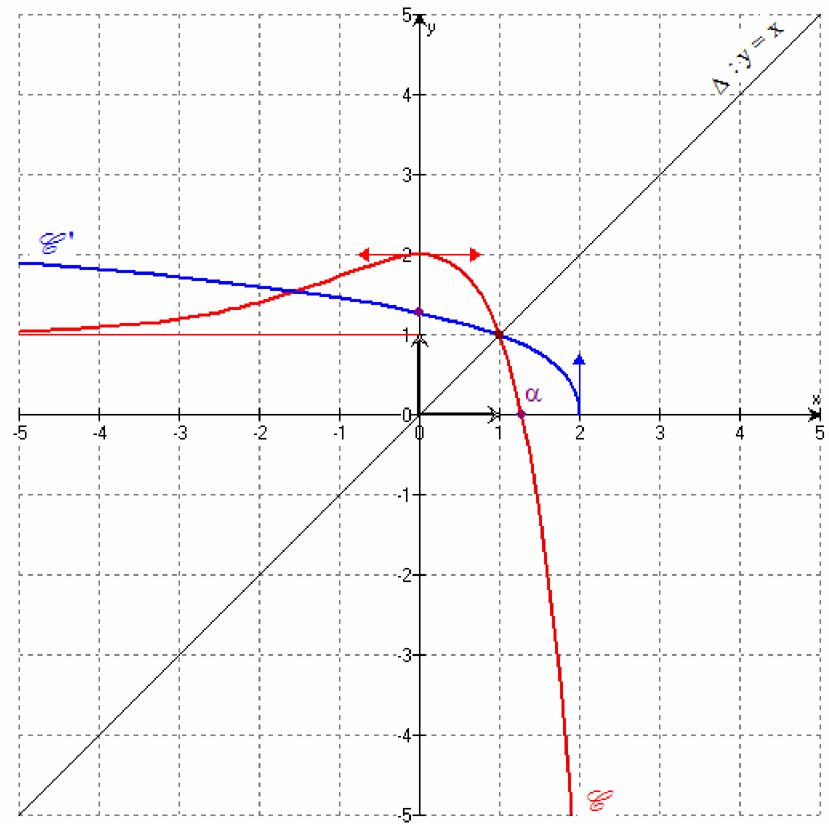
2) a- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} + e^x \left(\dfrac{1-x}{x}\right)\right) = -\infty$.

$(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b- pour tout $x \in IR$, $f(x) - x = 1 + e^x - xe^x - x = 1 + e^x - x(1 + e^x) = (1 + e^x)(1 - x)$.

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f(x) - x$	+ 0	−
position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ	$\mathscr{C}$ est au dessus de Δ	$\mathscr{C}$ est au dessous de Δ

c-



3) Voir figure.

4) a- F est dérivable sur IR et pour tout $x \in IR$, $F'(x) = 1 - e^x + (2 - x)e^x = 1 + e^x - xe^x = f(x)$.

Ainsi F est une primitive de f sur IR .

b- $\mathbf{A} = \int_0^1 |f(x) - x|\,dx = \int_0^1 (f(x) - x)\,dx$ car d'après 2)a $f(x) \geq x$ sur $]-\infty, 1]$

$$= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 x\,dx = [\,F(x)\,]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = F(1) - F(0) - \frac{1}{2} = (e - 1{,}5)\text{ u.a.}$$

c- En tenant compte de la symétrie de C et de C' par rapport à Δ, on a :

$\int_1^2 g^{-1}(x)\,dx = \mathbf{A}$ - l'aire du triangle OAB où $A(1,1)$ et $B(1,0)$

$$= e - 1{,}5 - \frac{1\times 1}{2} = (e - 2)\text{ u.a}$$