| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>ET DE LA FORMATION | SESSION<br>DE<br>CONTROLE | EXAMEN DU BACCALAURÉAT<br>SESSION DE JUIN 2009 |
|---|---|---|
| SECTION : SCIENCES TECHNIQUES | | |
| EPREUVE : MATHEMATIQUES | DURÉE : 3 Heures | COEFFICIENT : 3 |

### Exercice 1 : QCM (3 points)

*Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.*
*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*
*Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.*

1) La forme exponentielle du nombre complexe $-\sqrt{3}-i$ est

a) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$  b) $2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$  c) $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2) Si z est un nombre complexe alors le conjugué de $1 + iz^2$ est

a) $1 - iz^2$  b) $1 - i\,\overline{z}^2$  c) $-1 - iz^2$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ . Le module du nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$ est égal à

a) $1 + \left|e^{i\theta}\right|$  b) $\sqrt{2}$  c) $\sqrt{2\,(1+\cos\theta)}$

4) Soit A et B deux événements tels que : $p(A \setminus B) = \frac{1}{4}$ ; $p(A \setminus \overline{B}) = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$

Alors

a) $p(A) = \frac{7}{12}$  b) $p(A) = \frac{7}{24}$  c) $p(A) = \frac{1}{2}$

### Exercice 2 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1) a) Vérifier que $8 - 6i = (3 - i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ , l'équation (E) : $z^2 + (1 + i)\,z - 2\,(1 - i) = 0$.

2) Soit $\theta$ un réel de $[0, \pi]$

On considère l'équation : $(E_\theta) : z^2 + (1 + e^{i\theta}) z - 2(1 - e^{i\theta}) = 0$.

a) Vérifier que $(-2)$ est une solution de $(E_\theta)$.

b) Déterminer l'autre solution de $E_\theta$.

3) Soient $A$ et $M_\theta$ les points d'affixes respectives $-2$ et $1 - e^{i\theta}$ ; $\theta \in [0, \pi]$.

a) Calculer $AM_\theta$ en fonction de $\theta$.

b) Déterminer la valeur de $\theta$ de $[0, \pi]$ pour laquelle $AM_\theta$ est maximale.

**Exercice 3 : ( 5 points )**

Un nourrisson est pesé quotidiennement durant le 1[er] mois de sa naissance.

Dans le tableau statistique ci-dessous, la variable X désigne le nombre de jours après la naissance de nourrisson, et la variable Y le poids en kilogrammes.

| X (en jours) | 4 | 6 | 9 | 14 | 17 | 19 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y (en kg) | 3,6 | 3,75 | 3,80 | 3,90 | 4 | 4,25 | 4,5 |

1) a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à la série (X, Y).
b) Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?

2) a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type $\sigma_X$ de la variable X.

b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type $\sigma_Y$ de la variable Y.

3) a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.
b) Interpréter le résultat trouvé.

4) a) Calculer la covariance du couple(X, Y).
b) En déduire qu'une équation de la droite de régression de Y en X est $Y = 0{,}04\,x + 3{,}41$.
(les coefficients sont donnés à 0,01 près).

5) a) Quelle pourrait être une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?
b) Quel pourrait être l'âge du nourrisson sachant que son poids est 3,85 Kg ?

**Exercice 4 (6 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{x}}$.

b) Etudier les variations de f.

c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{x})$.

d) En déduire que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\Delta$.

e) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\Delta$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$.

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

4) Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.